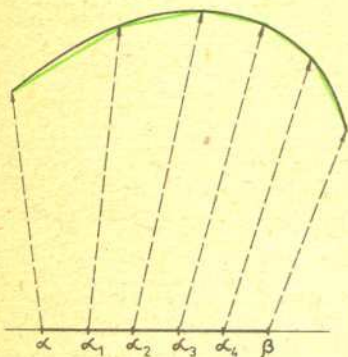


O krzywiznie, skręceniu i trójnogu Freneta krzywej (I)

Doc. dr Andrzej SZYBIAK



Rysunek 1. Długość krzywej obliczamy jako granicę długości łamanych wpisanych w krzywą.

Próba obliczenia długości dowolnego łuku elipsy zadała całej armii matematyków robotę na ponad sto lat; w rezultacie powstała obszerna teoria tzw. funkcji eliptycznych. Przy obliczaniu długości łuku elipsy dochodzimy bowiem do całek postaci $\int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 s} ds$, których przy $0 < k < 1$ nie można wyrazić przez skończoną liczbę funkcji elementarnych.



Najczęściej stosuje się oznaczenie $\alpha \times \beta$. Jest to wektor prostopadły do α i β , o długości równej polu równoległoboku o bokach α i β i takim, że trójka $\alpha, \beta, \alpha \times \beta$ jest dodatnio zorientowana (równoskrętna z $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$). Gdy α i β zależą od parametru t w sposób różniczkowalny, to $\alpha \times \beta$ też i $(\alpha \times \beta)' = \alpha' \times \beta + \alpha \times \beta'$. Podobną regułę można łatwo wyprowadzić i dla każdego iloczynu skalarnego: $\langle \alpha, \beta \rangle' = \langle \alpha', \beta \rangle + \langle \alpha, \beta' \rangle$.

Co należy rozumieć przez krzywą w przestrzeni euklidesowej E^3 ? Jak określić styczną do krzywej? Jak scharakteryzować zakrzywienie przy pomocy liczb? Tymi zagadnieniami zajmowano się już od czasów Leibniza, a może i wcześniej, zanim sformułowano pojęcie krzywej. Okazało się, że odpowiedź na postawione wyżej pytania najlepiej formułować w języku analizy matematycznej, dokładnie zaś: rachunku różniczkowego. Dlatego też dział matematyki w którym badamy krzywe, ich styczne, krzywizny, skręcenia, itp. nazywamy *geometrią różniczkową*.

§1. Ustalamy na osi liczbowej przedział J i niech $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ będą funkcjami ciągłymi na J . Trójkę $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ oznaczmy przez φ . Ustalmy w przestrzeni E^3 ortonormalny układ współrzędnych i przyporządkujmy każdemu punktowi $x \in J$ punkt w E^3 , którego współrzędnymi są liczby $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ i $\varphi_3(x)$. Tym sposobem określamy odwzorowanie ciągłe φ przedziału J w przestrzeń E^3 . Zapas tego odwzorowania, czyli zbiór punktów o współrzędnych $[\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)]$ nazywamy krzywą w E^3 . Samo odwzorowanie φ nazywamy opisem parametrycznym tej krzywej. Założyliśmy, że odwzorowanie φ jest ciągłe. Jeżeli jednak nie założymy czegoś więcej, to wyżej postawiona definicja krzywej może się okazać zbyt obszerną. Można podać przykład krzywej wypełniającej obszar dwuwymiarowy, lub nawet trójwymiarowy. Dlatego dalej będziemy rozważać wyłącznie takie opisy krzywych, których składowe nie tylko są ciągłe, ale mają również ciągłe pochodne pierwszego i drugiego rzędu. Zagadnienie obliczania długości krzywych podjął już Archimedes podając metodę obliczania długości okręgu. Używane dzisiaj określenie długości krzywej niczym się w zasadzie nie różni od podanego wówczas przez mistrza z Syrakuz. Ustalmy w E^3 krzywą opisaną przez odwzorowanie φ określone na przedziale J . Jeżeli podzielimy J na N rozłącznych podprzedziałów, $J = (\alpha, \alpha_1) \cup [\alpha_1, \alpha_2) \cup [\alpha_2, \alpha_3) \cup \dots \cup [\alpha_{N-1}, \beta)$, to odcinki $\varphi(\alpha)\varphi(\alpha_1), \varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2), \dots, \varphi(\alpha_{N-1})\varphi(\beta)$ utworzą łamaną w E^3 . Kres górny zbioru długości takich łamanych będziemy uważać za długość krzywej opisanej przez φ . Jeżeli dla każdego przedziału domkniętego i ograniczonego $J' \subset J$ krzywa opisana przez odwzorowanie φ zacieśnione do J' ma skończoną długość, to mówimy, że krzywa jest prostowalna. W toku nauki w szkole czy też na uczelni technicznej Czytelnik nie spotka się z krzywymi nieprostowalnymi. W szczególności prostowalnymi są proste, łuki okręgów, linia śrubowa, łuki elips. Na długość l krzywej będącej obrazem przedziału $\langle a, b \rangle$ poprzez φ mamy znany wzór

$$(1) \quad l = \int_a^b \sqrt{(\varphi_1'(u))^2 + (\varphi_2'(u))^2 + (\varphi_3'(u))^2} du.$$

Zauważmy, że wyrażenie pod pierwiastkiem po prawej stronie wzoru (1) jest kwadratem skalarnym wektora o składowych $\varphi_1'(u), \varphi_2'(u), \varphi_3'(u)$. Ustalmy krzywą opisaną przez odwzorowanie różnowartościowe φ i wybierzmy na krzywej punkt $p = \varphi(x_0)$. Dla dowolnego punktu $x > x_0$ przyjmijmy $\sigma(x) =$ długość obrazu przedziału $[x, x_0]$ poprzez φ a dla $x < x_0$ $\sigma(x) = -$ długość obrazu $[x, x_0]$ no i $\sigma(x_0) = 0$. Tak określona funkcja σ jest na J funkcją rosnącą i ciągłą, a wobec tego ma odwrotną, którą oznaczmy przez z . Określamy nowe odwzorowanie w przyjmując $w(x) = \sigma(z(x))$. Mamy więc

$$w(\sigma(y)) = \varphi(z(\sigma(y))) = \varphi(y) \quad \text{dla każdego } y \in J.$$

Z konstrukcji wynika, że:

1° odwzorowanie w jest określone na przedziale o długości równej długości obrazu J poprzez φ i opisuje tę samą krzywą co φ .

2° długość łuku tej krzywej zawartego pomiędzy punktami $w(s_1)$ a $w(s_2)$ wynosi $|s_1 - s_2|$.

Opisy krzywych w E^3 mające własność 2° nazywają się naturalnymi. Z powyższych konstrukcji wynika, że jeżeli krzywa ma opis różnowartościowy i składowe tego opisu mają pochodne ciągle, to mają również opisy naturalne.

§ 2. Dalej będziemy się zajmować krzywą w E^3 opisaną przez odwzorowanie naturalne w przedziale L w przestrzeń E^3 , o którym założymy ponadto, że jego składowe w_1, w_2, w_3 mają ciągle pochodne stopnia pierwszego i drugiego. Wprowadzimy następujące oznaczenia:

$$(2) \quad \begin{aligned} \tau_i(x, h) &= w_i(x) + w_i'(x)h + \frac{1}{2} w_i''(x)h^2, \\ \rho_i(x, h) &= w_i(x+h) - \tau_i(x, h). \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

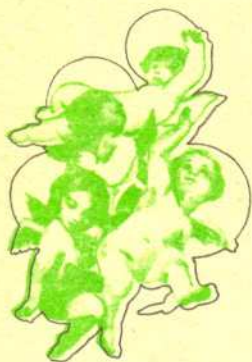
Oznaczmy przez $w(x)$ wektor wodzący punktu $w(x)$ względem pewnego układu współrzędnych (e_1, e_2, e_3) , a dalej niech

$$(3) \quad \begin{aligned} \vec{\rho}(x, h) &= \sum_{i=1}^3 \rho_i(x, h)e_i \\ \vec{\tau}(x, h) &= \sum_{i=1}^3 \tau_i(x, h)e_i \end{aligned}$$

$|a|$ będzie oznaczać długość wektora $a, \langle a, b \rangle$ — iloczyn skalarny wektorów a i b , a $a \times b$ — ich iloczyn wektorowy.



Rozwiązanie zadania M 246. Z warunków zadania wynika, że łączna liczba boków czarnych trójkątów byłaby o 10 większa od liczby boków białych trójkątów. Ale obie te liczby są podzielne przez 3 — sprzeczność.



Rozważmy teraz granicę $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (w(x+h) - w(x))$.

Wektor $w(x+h) - w(x)$ możemy sobie wyobrazić jako skierowaną cięciwę łuku naszej krzywej, mającą początek w punkcie $w(x)$ a koniec w punkcie $w(x+h)$. Przy naszych założeniach odnośnie opisu w liczba h jest długością łuku krzywej zawartego pomiędzy tymi punktami, zaś $|w(x+h) - w(x)|$ jest długością cięciwy. Iloraz tych dwóch wielkości zmierza do jedności przy h zmierzającym do zera. A więc wektor $w'(x)$ ma długość 1 i określa kierunek krzywej. Wektor ten oznaczmy symbolem $T(x)$. Jest to jednostkowy wektor styczny do naszej krzywej, a jego zwrot jest jednoznacznie wyznaczony przez opis w . Wykażemy, że wektor

$$w''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (w'(x+h) - w'(x))$$

jest do niego prostopadły. Różniczkując tożsamość

$$|w''(x)|^2 = 1 = \sum_{i=1}^3 (w'_i(x))^2$$

otrzymamy

$$0 = 2 \sum_{i=1}^3 w'_i(x) w''_i(x) = 2 \langle w'(x), w''(x) \rangle.$$

Iloczyn skalarny wektorów $w'(x)$ i $w''(x)$ jest równy zeru, a więc wektory te są albo prostopadłe, albo drugi z nich jest wektorem zerowym (bo pierwszy nie jest).

Ażeby otrzymać na naszej krzywej funkcję charakteryzującą jej krzywiznę będziemy się starać dobrać w danym jej punkcie najściślej dopasowany do niej okrąg. Za miarę krzywizny naszej krzywej uważamy odwrotność jego promienia. Wybierzmy więc na naszej krzywej trzy punkty $w(x-h)$, $w(x)$ i $w(x+h)$. Jeżeli nie leżą one na jednej prostej, to przechodzi przez nie dokładnie jeden okrąg. Promień $r_h(x)$ tego okręgu obliczymy ze wzoru

$$r_h(x) = \frac{\text{iloczyn boków trójkąta o wierzchołkach } w(x-h), w(x), w(x+h)}{4 \text{ pola tego trójkąta}}$$

Zastępując w tym wzorze pole trójkąta przez połowę długości iloczynu wektorowego boków $w(x-h)w(x)$ i $w(x)w(x+h)$ otrzymamy

$$(4) \quad r_h(x) = \frac{a(x, h)b(x, h)c(x, h)}{2|a(x, h) \vee b(x, h)|}$$

gdzie $a(x, h) = w(x) - w(x-h)$, $b(x, h) = w(x+h) - w(x)$, $c(x, h) = w(x+h) - w(x-h)$ i $a(x, h) = |a(x, h)|$, $b(x, h) = |b(x, h)|$, $c(x, h) = |c(x, h)|$. Przy ustalonym x i zmierzającym do zera h wielkość $r_h(x)$ zmierza do określonej granicy albo do nieskończoności. Wykażemy to, jednocześnie obliczając granicę. Mamy (zob. oznaczenia (2) i (3))

$$a(x, h) = w'(x)h - \frac{1}{2} w''(x)h^2 + \tilde{q}(x, h)$$

$$b(x, h) = w'(x)h + \frac{1}{2} w''(x)h^2 + \tilde{q}(x, h)$$

$$c(x, h) = 2w'(x)h + \varrho(x, h) + \tilde{q}(x, -h)$$

a stąd obliczamy

$$a(x, h) \vee b(x, h) = 2w(x) \vee w''(x)h^3 + w'(x) \vee \varrho(x, h)h - w'(x) \vee \varrho(x, -h)h$$

Z określenia funkcji wektorowej ϱ wynika, że $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varrho(x, h)}{h^2} = 0$, a stąd

$$(5) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^3} a(x, h) \vee b(x, h) = 2w'(x) \vee w''(x).$$

Podobnie możemy wykazać, że

$$(6) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^3} a(x, h)b(x, h)c(x, h) = |w'(x)| = 1.$$

Korzystając z faktu, że $w''(x)$ jest wektorem prostopadłym do wektora jednostkowego $w'(x)$, otrzymamy

$$(7) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{1}{h^3} a(x, h) \vee b(x, h) \right| = |w''(x)|$$

Wychodząc ze wzoru (4) i wykorzystując (5), (6), (7) wyliczmy ostatecznie, że

$$(8) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{r_h(x)} = |w''(x)|.$$

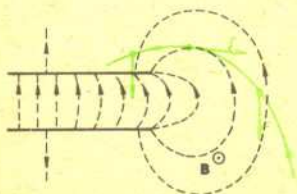


Rozwiązanie zadania F85.

Istotnym dla przyspieszenia jest odstęp czasu od chwili włączenia pola magnetycznego.

W tym okresie pola elektryczne

i magnetyczne są polami statycznymi. Siła, z jaką oddziałuje na ładunek takie pole magnetyczne, nie wykonuje pracy, pole elektrostatyczne jest zachowawcze. Praca jego sił na drodze zamkniętej wynosi zero. Efektowi przyspieszenia cząstki w obrębie kondensatora towarzyszyć musi hamowanie w obszarze zewnętrznym. Projekt jest dzięki swej niezwyklej „ekonomiczności” bezwartościowy. Efekt hamowania staje się bardziej namacalny, gdy narysuje się linie pola poza wnętrzem kondensatora. Należy również zwrócić uwagę, iż tor cząstki nie będzie już okręgiem, a jego znalezienie nawet dla najprostszej geometrii układu (płyty kołowe) jest problemem bardzo trudnym. Tor przedstawiony na rysunku posiada charakter umowny i ma za zadanie uapościć działające siły pola elektrycznego.





Mamy już wzór na promień granicznego okręgu. Znajdziemy jego środek oraz płaszczyznę, w której on leży. W tym celu rozpinamy na wektorach $a(x, h)$ i $b(x, h)$ płaszczyznę i będziemy szukać jej położenia granicznego przy h zmierzającym do zera. Płaszczyzna ta jest wyznaczona jednoznacznie wtedy i tylko wtedy, kiedy punkty $w(x-h)$, $w(x)$ i $w(x+h)$ nie leżą na jednej prostej. Pomińmy więc ten przypadek, kiedy nasza krzywa jest prostą w otoczeniu punktu $w(x)$. Wektor $h^{-3}a(x, h) \vee b(x, h)$ jest więc wektorem prostopadłym do płaszczyzny wyznaczonej przez punkty $w(x-h)$, $w(x)$ i $w(x+h)$. Obliczyliśmy już, że jego granica przy h zmierzającym do zera jest równa wektorowi $\frac{1}{2}w(x) \vee w''(x)$. A więc równanie płaszczyzny granicznej ma postać

$$(9) \quad \left\langle \overrightarrow{w(x)X}, \frac{1}{2}w'(x) \vee w''(x) \right\rangle = 0.$$

X oznacza tu zmienny punkt płaszczyzny. Płaszczyznę (9) nazwiemy płaszczyzną ściśle styczną naszej krzywej w punkcie $w(x)$.

Przykład. Na rysunku 2 widzimy linię śrubową. Ma ona przedstawienie parametryczne

$$w(t) = (w_1(t), w_2(t), w_3(t)),$$

gdzie $w_1(t) = \cos t$, $w_2(t) = \sin t$, $w_3(t) = t$. Aby znaleźć np. równanie płaszczyzny ściśle stycznej, musimy to przedstawienie zmienić tak, by było „naturalne”. Z wzoru (1) obliczamy łatwo, że długość łuku linii śrubowej między punktami $w(t_1)$ a $w(t_2)$ wynosi $\sqrt{2}|t_1 - t_2|$. Przyjmijmy zatem $s = t\sqrt{2}$ i wtedy

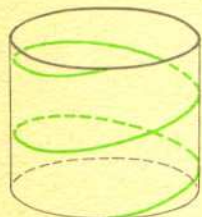
$$w(s) = \left(\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}} \right)$$

$$w'(s) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$w''(s) = \left(-\frac{1}{2} \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2} \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

$$w'(s) \vee w''(s) = \left(+\frac{1}{2\sqrt{2}} \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}} \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

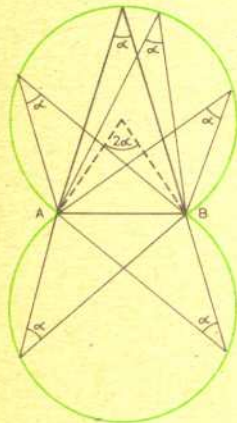
Gdy $s = 0$, to $w' \vee w'' = \left(0, -\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$. Płaszczyzna ściśle styczna ma równanie $-x_2 + 2x_3 = 0$.



Rys. 2. Linia śrubowa



Rozwiązanie zadania M244. Miejsce geometryczne punktów płaszczyzny, z których dany odcinek AB widać pod ustalonym kątem, składa się z dwóch łuków okręgów o promieniu $r = AB/2 \sin \alpha$ (rysunek). Szukane miejsce geometryczne składa się zatem z punktów przecięcia tych „ósemek”



dla AB i $A'B'$. Za pomocą cyrkiła i linijki możemy wyznaczyć dowolną liczbę takich punktów. Rozwiązanie analityczne (rysunek) sprowadza się do wyliczenia punktów przecięcia okręgów

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y \pm a)^2 = a^2 + \frac{1}{4}$$

z okręgami

$$(x \pm a)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = a^2 + \frac{1}{4}.$$

Otrzymujemy stąd układ równań

$$\begin{aligned} x^2 - 3x + 2 + y^2 \pm 2ay &= 0 \\ y^2 - 3y + 2 + x^2 \pm 2ax &= 0. \end{aligned}$$

Ponieważ a jest dowolnym parametrem rzeczywistym, wystarczy rozpatrywać tylko dwa przypadki:

1) znaki zgodne (oba plusy): wtedy po odjęciu równań stronami i prostych przekształceniach dostajemy $x - y = 0$ lub $x^2 + y^2 - 3(x + y) + 2 = 0$, tj. dwusieczną kąta między tymi odcinkami i okrąg przechodzący przez ich końce. Punkty krótszych łuków AB i $A'B'$ nie spełniają warunków zadania. 2) znaki przeciwne, np. $+$, $-$. Wówczas po odjęciu równań stronami wyliczamy, że $a = \frac{3(x-y)}{2(x+y)}$

i wstawiając to do pierwszego równania dostajemy po prostych przekształceniach

$$(x+y)(x^2+y^2+2) - 3(x^2+y^2) = 0.$$

Punkty tej krzywej (rysunek) też spełniają warunki zadania — z wyjątkiem punktów położonych na łukach między B i A oraz między B' i A' .

