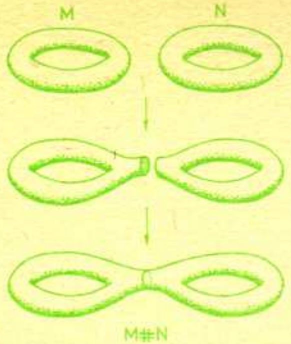
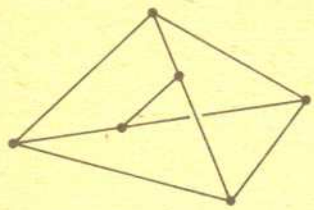
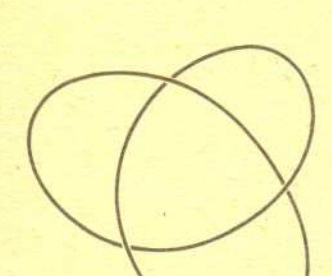


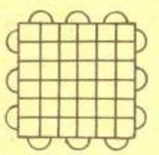


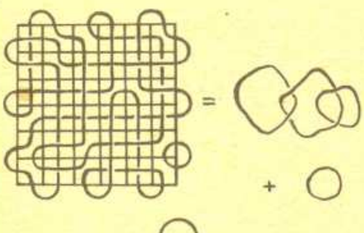


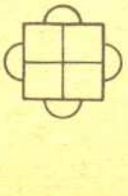
Sfera, torus i płaszczyzna rzutowa są powierzchniami najbardziej, w pewnym sensie, podstawowymi, można z nich bowiem otrzymać każdą inną z pomocą prostej operacji: wycinając w powierzchniach *M* i *N* okrągłe otwory i sklejając razem ich brzegi otrzymujemy powierzchnię *M* # *N* zwaną sumą spójną powierzchni *M* i *N*. Rysunek obok pokazuje sumę spójną dwóch torusów, a twierdzenie klasyfikacyjne mówi, że każda powierzchnia jest topologicznie identyczna bądź ze sferą, bądź z sumą spójną torusów, bądź z sumą spójną płaszczyzn rzutowych. Twierdzenie nie jest banalne: z którą z wyliczonych powierzchni jest identyczna suma spójna torusa i płaszczyzny rzutowej? (por. artykuł J. Olędzkiego w następnym numerze Delty).

I tak doszliśmy do czasów zupełnie już nam współczesnych, co skłania do zakończenia tego przeglądu paru słowami komentarza o obecnych badaniach nad krzywymi i powierzchniami oraz roli tych badań we współczesnej matematyce. Wypowiadam tu pogląd bardzo osobisty, wydaje się jednak, że w zakresie krzywych geometria syntetyczna, geometria analityczna i geometria różniczkowa nie mają już wiele do dodania, a choć rozwija się jeszcze topologiczna teoria krzywych, to i ona ma prawdopodobnie największe dni za sobą. Żywe są jednak badania nad niektórymi szczególnymi rodzajami krzywych jak *grafy* i niektórymi szczególnymi rodzajami zagadnień jak *położenie*. Grafem nazywa się skończoną sumę łuków zlepionych końcami i poza nimi rozłącznych, a teoria grafów znalazła liczne i poważne zastosowania w wielu dziedzinach działalności ludzkiej. Na terenie tej teorii zostało w 1976 roku rozstrzygnięte głośne zagadnienie czterech barw (o malowaniu map na płaszczyźnie), stanowiące zresztą zaledwie wierzchołek góry lodowej wielu podobnych, ważnych i trudnych problemów. Najlepszą ilustrację zagadnienia położenia stanowią *węzły* i pytanie: kiedy dwa węzły są równoważne (jeden daje się przeprowadzić na drugi bez rozplątywania). Matematycznie węzeł jest krzywą zwykłą zamkniętą, tj. ,,gumowym" obrazem okręgu w 3-wymiarowej przestrzeni euklidesowej, a dwa węzły są równoważne, gdy istnieje topologiczna transformacja przestrzeni na siebie, przy której jeden z nich przechodzi na drugi. W tym sensie koniczynka i węzeł ósemkowy (na rysunku obok) nie są równoważne. Podobnie jak teoria grafów, także teoria węzłów jest dziś w pełni rozkwitu, ale i ona wykracza poza ten artykuł. Nieco inna jest sytuacja powierzchni, stanowią one bowiem najniższą, ,,źródłową" warstwę rozmaitości, tj. takich przestrzeni (zwartych, spójnych, metryzowalnych), których każdy punkt ma otoczenie takie same (topologicznie) jak dowolny punkt przestrzeni euklidesowej ustalonego wymiaru *n* (zwanego wymiarem rozmaitości). Jak kiedyś krzywe, tak dziś rozmaitości znajdują się w samym centrum matematyki i wszystko wskazuje na to, że długo tam pozostaną.

Brząkanie czas kończyć. Trwało długo, a przecież dotknęliśmy tylko niektórych strun pomijając wiele innych. Pominęliśmy różne krzywe znane i ważne dla zastosowań jak *loksodroma* i *ortodroma*, krzywe balistyczne, trajektorie ciał niebieskich i ich osobliwości (bez ich znajomości niemożliwa by była eksploracja kosmosu), ciekawe krzywe w biologii, krzywe trygonometryczne i opartą na nich analizę harmoniczną zajmującą się badaniem zjawisk periodycznych, XIX-wieczną modę na krzywe i konstruowane podówczas rozmaite aparaty do ich rysowania (np. piękne ,,krzywe Lissajous"), krzywe jako granice łamanych (z wyjątkiem krzywej Peano), krzywe jako obwiednie, krzywe biegunowe, krzywe jednobieżne i wiele, wiele innych. Podobnie pominęliśmy także różne ciekawe zjawiska na powierzchniach jak *prostokreślność*, *jednostronność*, *zawęźlenie* (podobnie jak obraz topologiczny okręgu S^1 może być zawęźlony w R^3, tak obraz topologiczny sfery S^2 może być zawęźlony w R^4), punkty siodłowe i inne, a także bliższe omówienie wielu powierzchni szczególnych jak *butelka Kleina*, *katenoida* itp. Na to wszystko nie starczyło już czasu ni miejsca, bo matematyka to taki osobliwy skarbiec, że im więcej się zeń czerpie, tym więcej skarbów się odkrywa.







Planszę do naszej gry widzimy na rysunku poniżej. Tworzy ją kwadrat 6×6 z dorysowanymi z każdej strony trzema uchami.
Gracze wykonują ruchy na przemian, stawiając w poszczególnych kwadratach lub . Gdy plansza jest już zapełniona, powstaje rysunek, który możemy interpretować jako krzywą przestrzenną. Pierwszy z graczy stara się w ciągu gry, by była ona jak najbardziej ,,zawęźlona", wysiłki drugiego idą w kierunku jej ,,rozplątywania", tak, by przy końcu gry krzywa miała jak najmniej ,,skrzyżowań", a jak najwięcej niezawęźlonych pętli. Oto przykład w którym pierwszy z graczy dostał 4 punkty (za każde ze skrzyżowań), a drugi z graczy dostał 1 punkt za izolowaną pętlę. Po każdej partii powinna nastąpić zmiana ról graczy. Możemy wprowadzić oczywiście inne sposoby punktowania. W tę grę można grać nawet na szachownicy 2×2 (oczywiście nie za długo). Czy możecie znaleźć optymalne strategie dla graczy?