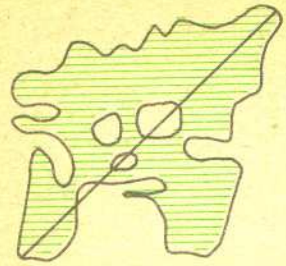
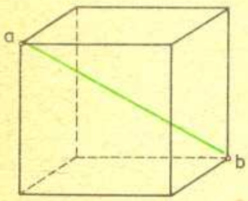
Figury o stałej szerokości

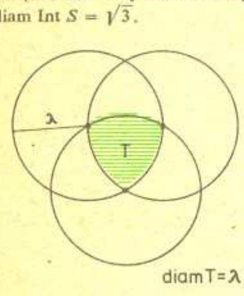
Dr Marek LASSAK



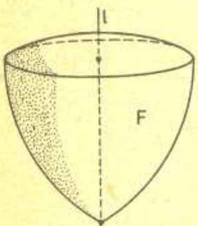
Rys. 1. Tak mierzymy średnicę jeziora Śniardwy.



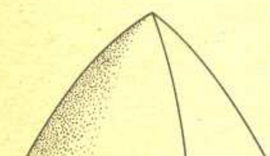
Rys. 2. S — sześcian o krawędzi długości 1, Int S — wnętrze S. Wtedy diam $S = d(a, b) = \sqrt{3}$, diam Int $S = \sqrt{3}$.



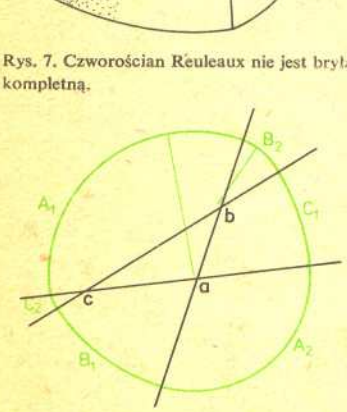
Rys. 3. Trójkąt Reuleaux



Rys. 4. Bryła kompletna.



Rys. 7. Czworościan Reuleaux nie jest bryłą kompletną.



Rys. 8. Konstrukcja figury kompletnej będącej uogólnieniem zarówno koła, jak i trójkąta Reuleaux.

Średnicą figury nazywamy kres górny odległości $d(a, b)$ jej punktów. Średnicę figury A oznaczymy symbolem diam A. Na ogół słów ,,kres górny odległości" nie wolno zamienić na prostsze słowa ,,największa odległość". Na przykład koło bez brzegu nie ma pary punktów maksymalnie odległych. Wiadomo jednak, że powyższa zamiana jest poprawna w przypadku figur domkniętych i ograniczonych (zob. np. rys. 2). Takimi właśnie, jak się okaże, będą figury rozważane w tym artykule.

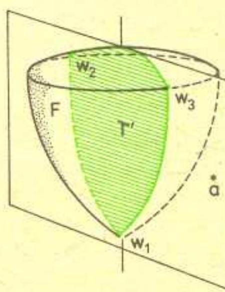
Definicja. Ograniczoną figurę nazywamy kompletną, jeżeli dołożenie do niej jakiegokolwiek nowego punktu powoduje zwiększenie średnicy. Czyli.

$$A \text{ jest kompletna} \Leftrightarrow \bigwedge_{a \notin A} \operatorname{diam}(A \cup \{a\}) > \operatorname{diam} A.$$

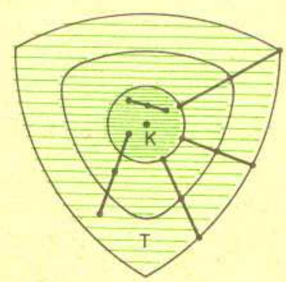
Mówiąc jeszcze inaczej: ograniczona figura A jest kompletna, jeżeli jest ona maksymalnym zbiorem o średnicy diam A.

Najprostszym przykładem figury kompletnej na płaszczyźnie jest koło, natomiast w przestrzeni kula. Inną płaską figurą kompletną jest tzw. trójkąt Reuleaux (zob. rys. 3). Jest on częścią wspólną trzech kół o równych promieniach długości λ i środkach będących wierzchołkami równobocznego trójkąta o średnicy λ. Z rysunku natychmiast odczytujemy, że średnica trójkąta Reuleaux wynosi także λ. Każdy punkt leżący poza trójkątem Reuleaux T jest więc odległy od jednego z jego ,,wierzchołków" więcej niż $\lambda =$ diam T. Świadczy to o kompletności figury T.

Jeżeli trójkąt Reuleaux T obrócimy wokół jednej z osi symetrii l, to otrzymana bryła obrotowa F (zob. rys. 4) jest też kompletna. Aby to sprawdzić, weźmy dowolny punkt $a \notin F$. Przetnijmy F płaszczyzną zawierającą a i oś symetrii l (zob. rys. 5). W przekroju otrzymujemy trójkąt Reuleaux T! Ponieważ $a \notin T'$, więc a musi być odległy od jednego z jego wierzchołków (który jest oczywiście punktem bryły F) więcej niż diam $T' =$ diam F. Z dowolności punktu a wynika, że bryła obrotowa F jest kompletna. Ogólniej, jeżeli płaską figurę kompletną mającą oś symetrii obrócimy dookoła tej osi, to otrzymamy przestrzenną figurę kompletną.



Rys. 5. Ilustracja dowodu kompletności bryły obrotowej z rys. 4.



Rys. 6. Tworzenie kompletnej figury pośredniej w zadaniu 2.

Zadanie 1. Analogicznie do konstrukcji trójkąta Reuleaux zbudować ,,wielokąt Reuleaux". Wykazać, że tylko dla nieparzystej liczby kół jest on kompletny.

Zadanie 2. Z trójkąta Reuleaux T i koła K o wspólnych środkach budujemy figurę pośrednią (zob. rys. 6) złożoną z punktów będących środkami odcinków, których jeden koniec leży w T a drugi w K. Wykazać kompletność tej figury.

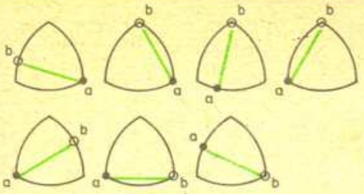
Zadanie 3. Analogicznie do konstrukcji trójkąta Reuleaux budujemy w przestrzeni ,,czworościan Reuleaux" (rys. 7) jako wspólną część czterech kul o promieniach długości λ i środkach będących wierzchołkami czworościanu foremnego o średnicy λ. Uzasadnić, że otrzymana bryła nie jest kompletna.

Zadanie 4. Podać przykład nieobrotowej przestrzennej figury kompletnej.

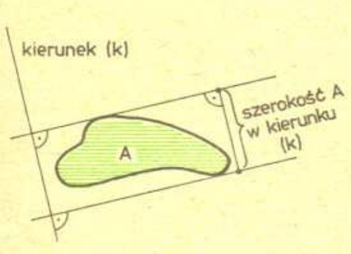
Wskazówka: ulepszyć konstrukcję czworościanu Reuleaux.

Zbudujemy płaską figurę będącą uogólnieniem zarówno trójkąta Reuleaux jak i koła. Weźmy trójkąt o wierzchołkach a, b, c (rys. 8). Niech a leży naprzeciwko najdłuższego boku, c zaś naprzeciwko najkrótszego. Niech A_1 oznacza $\sphericalangle\, cab$, A_2 zaś kąt wierzchołkowy do A_1. Podobnie określamy kąty B_1, B_2 i C_1, C_2. W kącie A_1 kreślimy łuk o środku a i promieniu $r \geqslant d(a, c)$. Teraz w kącie B_2 kreślimy łuk o środku b zaczynający się tam, gdzie kończył się poprzedni łuk. Analogicznie, po kolei kreślimy łuki w kątach C_1, A_2, B_1 i C_2 (zob. rys. 8).

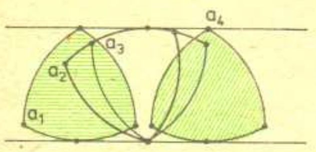
Zadanie 5. Wykazać, że skonstruowana powyżej krzywa jest zamknięta i że figura ograniczona tą krzywą jest kompletna.



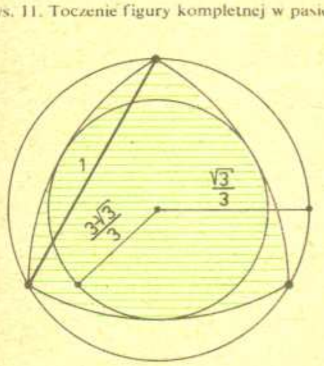
Rys. 9. Przemieszczanie odcinka średnicowego w trójkącie Reuleaux



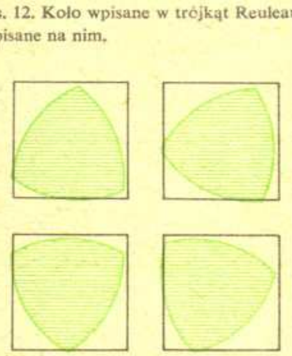
Rys. 10. Szerokość figury w danym kierunku.



Rys. 11. Toczenie figury kompletnej w pasie



Rys. 12. Koło wpisane w trójkąt Reuleaux i opisane na nim.



Rys. 13. Wiertłem, którego przekrój jest trójkątem Reuleaux, można wiercić otwory o kształcie bardzo zbliżonym do kwadratu (tylko na brzegach są niewielkie zaokrąglenia). Odpowiednie urządzenie zbudował i opatentował w 1917 r. (numery patentów 1241175-7) amerykański inżynier Harry J. Watts.

Niektóre zadania można przenieść do n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej, a definicję zbioru kompletnego i pierwsze twierdzenie nawet do przestrzeni metrycznych.

Franz Reuleaux (1829—1905) — matematyk i inżynier, profesor Politechniki w Zurychu, a potem Wyższej Szkoły Technicznej w Berlinie.

Twierdzenie. *Figura A jest kompletna wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona częścią wspólną wszystkich kul, których środki leżą w A, promienie zaś mają długość diam A.*

Dowód. Oczywiście każda kula o promieniu długości diam A i środku w figurze A zawiera A, a więc A mieści się w części wspólnej wszystkich kul, których środki leżą w A, a promienie mają długość diam A. Pokażemy, że kompletność figury pozwala słowa „mieści się" zamienić na „równa się". W tym celu wystarczy pokazać, że dla dowolnego punktu $a \notin A$ znajdzie się taka kula K_a o środku leżącym w A i promieniu równym diam A, że $a \notin K_a$. Znajdźmy więc tę kulę K_a. Z kompletności figury A wynika, że diam $(A \cup \{a\}) >$ diam A. Oznacza to, że istnieje punkt $b \in A$, dla którego $d(a, b) >$ diam A. A zatem kula o środku $b \in A$ i promieniu długości diam A nie zawiera punktu a, możemy więc przyjąć ją jako szukaną kulę K_a.

Reasumując: figura kompletna A jest częścią wspólną wszystkich kul o środkach leżących w A i promieniach długości diam A. Załóżmy, że figura A jest identyczna z częścią wspólną wszystkich kul o środkach leżących w A i promieniach długości diam A. Weźmy dowolny punkt $c \notin A$. Istnieje taka kula K o środku $p \in A$ i promieniu długości diam A, że $c \notin K \supset A$. Stąd $d(c, p) >$ diam A. Widać zatem, że dołożenie do figury A dodatkowego punktu powoduje zwiększenie się średnicy. Świadczy to o kompletności figury A.

Zadanie 6. Wykazać, że każda figura kompletna jest wypukła i domknięta.

Proste rachunki wykazują, że obwód trójkąta Reuleaux o średnicy λ wynosi $\pi\lambda$, a jego pole $\frac{\pi-\sqrt{3}}{2}\cdot\lambda^2$. Co więcej ma miejsce następujący zdumiewający fakt.

Twierdzenie. *Wszystkie kompletne figury płaskie o średnicy λ mają obwód długości $\pi\lambda$. Wśród nich największe pole ma koło, a najmniejsze trójkąt Reuleaux.*

Dowód tego twierdzenia jest trudny. Nie jest ponadto prawdziwy jego przestrzenny odpowiednik. Na przykład pole powierzchni kompletnej bryły obrotowej F (zob. rys. 4) o średnicy λ wynosi $\pi\left(2-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\lambda^2 \approx \pi\cdot 0{,}93\cdot\lambda^2$ (co łatwo obliczyć wzorem całkowym na pole powierzchni obrotowej), zaś pole powierzchni kuli o średnicy λ równa się $\pi\lambda^2$.

Zadanie 7. Wykazać, że w odległości diam A od dowolnego punktu brzegowego figury kompletnej A leży co najmniej jeden jej punkt brzegowy. Powyższe zadanie ułatwia rozwiązanie trzech następnych.

Zadanie 8. Jedyną figurą kompletną mającą środek symetrii jest na płaszczyźnie koło, a w przestrzeni kula. Dlaczego?

Zadanie 9. Udowodnić, że przez każdy punkt figury kompletnej A przechodzi co najmniej jeden odcinek o długości diam A zawarty w A.

Zadanie 10. Wykazać, że odcinek o długości diam A leżący w płaskiej figurze kompletnej A można tak przemieszczać w tej figurze, aby jego końce zamieniły się miejscami (na rys. 9 pokazano to dla trójkąta Reuleaux).

Szerokością figury A w kierunku (k) nazywamy szerokość najmniejszego pasa zawierającego figurę A i ograniczonego prostymi (a w przestrzeni trójwymiarowej płaszczyznami) prostopadłymi do (k) (rys. 10).

Zadanie 11. Każda figura kompletna o średnicy λ ma we wszystkich kierunkach tę samą szerokość λ. Dlaczego?

Zadanie 12. Wykazać, że jeżeli domknięta wypukła figura ma stałą szerokość λ w każdym kierunku, to jest ona kompletna i ma średnicę λ.

Dlatego figury kompletne nazywane są często figurami o stałej szerokości. Zadania 10 i 11 mówią, że każda figura kompletna może być „toczona" w pasie mając zawsze punkty wspólne z prostymi lub płaszczyznami ograniczającymi ten pas (zob. rys. 11) i że żadne inne wypukłe domknięte figury własności tej nie mają.

Na zakończenie trzy trudniejsze zadania.

Zadanie 13. Na każdej kompletnej płaskiej figurze można opisać koło i wpisać w nią koło. Koła te są współśrodkowe, a suma ich promieni równa się średnicy figury. Ekstremalne wartości stosunku tych promieni osiągane są odpowiednio dla koła i trójkąta Reuleaux.

Zadanie 14. Na każdej przestrzennej figurze kompletnej o średnicy λ można opisać kulę, a także wpisać w nią kulę. Kule te są współśrodkowe, suma ich promieni wynosi λ. Największy promień kuli opisanej wynosi $\sqrt{\frac{3}{8}}\,\lambda$.

Zadanie 15. Każdą figurę można dopełnić (często na wiele sposobów) do figury kompletnej nie zwiększając przy tym średnicy.