Dualność w programowaniu liniowym

Najprostszą wersję zagadnienia programowania liniowego można sformułować następująco:
Znaleźć największą (lub najmniejszą) wartość funkcji liniowej zwanej funkcją celu

$$c(x) = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n$$

na zbiorze A określonym następującymi nierównościami:

$$(*) \quad \begin{cases} x_1 \geq 0 \\ \cdots\cdots \\ x_n \geq 0 \\ a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_n \leq b_k. \end{cases}$$

(Zbiór A jest więc wielościanem wypukłym).
Z punktu widzenia „matematyki czystej” teoria tego problemu sprowadza się do stwierdzenia, że o ile poszukiwane maksimum istnieje, to jest przyjmowane w jednym z wierzchołków wielościanu A.
Wierzchołek taki możemy znaleźć rozwiązując układ n równań liniowych wybranych z równań

$$(**) \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ \cdots\cdots \\ x_n = 0 \\ a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k. \end{cases}$$

Tak więc, aby nasz problem rozwiązać, wystarczy:
1. rozwiązać wszystkie $\binom{n+k}{n}$ uzyskanych w ten sposób układów równań,
2. sprawdzić, czy rozwiązanie takiego układu spełnia pozostałe k warunków (*), czyli czy należy do zbioru A,
3. wybrać spośród znalezionych wierzchołków ten, w którym wartość funkcji c jest największa.

Niestety, „rozwiązanie” to nie ma wartości praktycznej: dla rozwiązania zagadnienia, w którym $n = 50$ zmiennych jest związane $k = 150$ warunkami, musielibyśmy rozpatrzyć $\binom{n+k}{n} = \binom{200}{50} \approx 10^{150}$ układów 50 równań z 50 niewiadomymi, co gwarantowałoby nam zajęcie na co najmniej 10^{10} lat.
Tak więc należałoby poszukać sprawniejszego algorytmu rozwiązywania naszego zagadnienia. Pytanie jeszcze, po co?
Otóż okazuje się, że wiele problemów „życiowych” (głównie natury ekonomicznej) formułuje się właśnie w terminach programowania liniowego.
Oto najprostszy przykład.
Możemy produkować n różnych wyrobów, przy czym zysk z produkcji jednostki i-tego wyrobu wynosi c_i, a jej wyprodukowanie wymaga a_{ij} jednostek j-tego surowca. Mamy do dyspozycji b_j jednostek j-tego materiału. Ile jednostek poszczególnych wyrobów powinniśmy wyprodukować, aby osiągnąć maksymalny zysk? Takie i podobne problemy pojawiają się dostatecznie często, aby było warto zająć się poważnie szukaniem metody ich rozwiązywania.
Nie będziemy tu omawiać szczegółowo najbardziej znanego takiego algorytmu (tzw. metody simplex), podamy tylko jej sens geometryczny.
Drogę do rozwiązania optymalnego zaczynamy od dowolnego wierzchołka w_1 wielościanu A (zwykle od punktu $(0, \ldots, 0)$).
Wśród wychodzących z tego wierzchołka krawędzi szukamy teraz tych, w kierunku których rośnie funkcja celu. Jeżeli takich krawędzi nie ma, jesteśmy już w wierzchołku poszukiwanym i możemy zakończyć pracę. W przeciwnym przypadku wybieramy krawędź „najbardziej obiecującą” i przechodzimy po niej do następnego wierzchołka, aby opisaną procedurę powtórzyć. Wierzchołek optymalny znajdziemy wykonując co najwyżej k takich kroków.
Pora teraz na zapowiedzianą w tytule dualność. Otóż zagadnienie dualne polega na zamianie ról ograniczeń (materiałów w naszej interpretacji ekonomicznej) i zmiennych — czyli przejściu do przestrzeni sprzężonych — p. artykuł M. Szurka i gastronomiczny.
Otrzymujemy w ten sposób problem następujący:
Znaleźć minimum funkcji

$$d(w) = b_1 w_1 + \ldots + b_k w_k$$

na zbiorze A wyznaczonym warunkami

$$\begin{cases} w_1 \geq 0 \\ \cdots\cdots \\ w_k \geq 0 \\ a_{11}w_1 + \ldots + a_{k1}w_k \geq c_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}w_1 + \ldots + a_{kn}w_k \geq c_n. \end{cases}$$

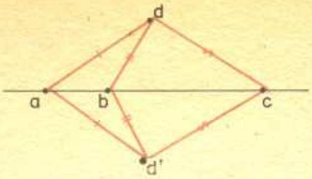
Zagadnienie jest poprawnie sformułowane, występują w nim te same współczynniki co w zagadnieniu pierwotnym, ale co mają ze sobą wspólnego ich rozwiązania? I jaki jest ich sens?
Zauważmy, że w rozwiązaniu zagadnienia z l zmiennymi i m warunkami wartość niezerową może przybierać co najwyżej $\min(l, m)$ zmiennych (dlaczego?).
Jeżeli więc np. $k > n$, to rozwiązaniem zagadnienia dualnego będzie punkt $(w_1^0, \ldots, w_k^0)$, w którym co najwyżej n współrzędnych będzie różnych od zera. Wiemy, że zmienne w_i odpowiadają ograniczeniom (nierównościom) zagadnienia pierwotnego — wobec tego dokonaliśmy w ten sposób pewnego wyboru warunków. Okazuje się, że są to dokładnie te nierówności, które określają wierzchołek poszukiwany w zagadnieniu pierwotnym.
Warto zauważyć, że gdy $k \neq n$, rozwiązywanie zagadnienia pierwotnego i dualnego może się różnić złożonością rachunków i wobec tego w niektórych przypadkach rozważanie problemu dualnego może przynieść istotny zysk czasowy.
Czy można jeszcze dokładniej sprecyzować sens rozwiązania dualnego?
Okazuje się, że tak. Rozważmy mianowicie płaszczyzny wyznaczające poszukiwany wierzchołek x^0. Będą to płaszczyzny odpowiadające pewnym zmiennym w_i rozwiązania dualnego.
Jeżeli teraz $a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$ jest równaniem takiej płaszczyzny, to $a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = b_i + \varepsilon$ będzie równaniem bliskiej płaszczyzny równoległej. Takie „rozluźnienie” i-tego warunku spowoduje, że rozwiązanie optymalne x^0 przesunie się do położenia $x^{0\prime}$, dając pewien zysk na funkcji celu — zysk proporcjonalny do ε. Okazuje się, że współczynnikiem tej proporcjonalności jest właśnie w_i^0.
Gdybyśmy dokonali „analizy wymiarowej” problemu programowania liniowego w interpretacji ekonomicznej, okazałoby się, że w_i ma „wymiar” ceny zł/jednostka. Jest to tzw. cena dualna i-tego materiału, będąca miernikiem jego względnej wartości w określonej naszymi warunkami (*) sytuacji: materiały, których mamy w nadmiarze mają „cenę” 0, a materiały najbardziej potrzebne z punktu widzenia naszych celów — cenę najwyższą.

Mgr Krzysztof Nowiński

Pojęcia pierwotne w geometrii euklidesowej

Doc. dr Lesław W. SZCZERBA

Najbardziej znany układ pojęć pierwotnych pochodzi od Dawida Hilberta (1899). Pojęciami tymi są: *punkt*, *prosta*, *płaszczyzna*, *leży na*, *leży między* i *przystaje*. Punkty będą oznaczane małymi literami łacińskimi, duże litery łacińskie zarezerwujemy dla prostych, a małe greckie dla płaszczyzn (chyba, że zaznaczono inaczej). Relacja incydencji (*leży na*) będzie oznaczana przez I. Może ona zachodzić między punktami a prostymi lub płaszczyznami, a także między prostymi a płaszczyznami. Relacja *leżenia między* będzie oznaczana przez B i może zachodzić między trzema punktami. Wreszcie relacja *przystawania*, $\equiv$, może zachodzić dla dwu par punktów lub dwu par prostych. W pierwszym przypadku mówi się o przystawaniu odcinków, w drugim — kątów.
Nie jest to ani jedyny, ani nawet najprostszy układ pojęć pierwotnych. Prostszy zaproponował Alfred Tarski (1951). Składa się on z pojęć występujących już u Hilberta. Pojęciami tymi są mianowicie: *punkt*, *leży między*, *przystaje*. Ten układ pojęć pierwotnych też nie jest najekonomiczniejszy: relację *leżenia między* można zdefiniować za pomocą przystawania.

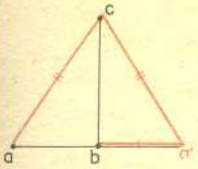


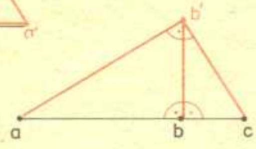
Aby to pokazać, zdefiniujmy najpierw relację *współliniowości*:
$L(abc) \leftrightarrow a = b \vee \bigwedge dd'(da \equiv ad' \wedge db \equiv bd' \rightarrow dc \equiv cd')$ (czytamy: a, b, c są współliniowe).
Następnym pojęciem, które należy zdefiniować jest kąt prosty: $\llcorner(abc)$ (czytamy: abc tworzą kąt prosty (o wierzchołku b).

$$\llcorner(abc) \leftrightarrow a = b \vee \bigvee a'(ab \equiv ba' \wedge ac \equiv ca' \wedge a \neq a' \wedge L(aba')).$$

Pojęcie kąta prostego pozwala zdefiniować relację leżenia między:

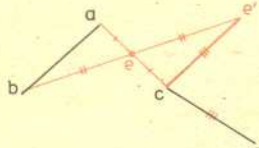
$$B(abc) \leftrightarrow L(abc) \wedge \bigvee b'(\llcorner(abb') \wedge \llcorner(b'bc) \wedge \llcorner(ab'c)).$$





W ten sposób otrzymaliśmy system pojęć pierwotnych, równoważny systemowi Tarskiego. Składa się on z pojęć: *punkt*, *przystaje*. Relacja przystawania jest relacją czteroargumentową. Oszczędniej byłoby mieć relację trójargumentową. Taki układ pojęć pierwotnych zaproponował Pieri (1899). Na system ten składają się pojęcia: *punkt* i *trójkąt równoramienny*. Pojęcie to jest szczególnym przypadkiem przystawania odcinków: dlatego zamiast „abc tworzą trójkąt równoramienny" będziemy pisać „$ab \equiv bc$". Łatwo zauważyć, że definicja współliniowości w terminach przystawania, podana powyżej, jest w istocie definicją w terminach Pieriego. Podobnie jest z definicją kąta prostego i relacji leżenia między. Można więc przyjąć, że wszystkie te trzy relacje zostały zdefiniowane w systemie Pieriego. Teraz zdefiniujemy relację *środka*

$$\vdots(abc) \leftrightarrow B(abc) \wedge ab \equiv bc,$$



a za jej pomocą relację przystawania

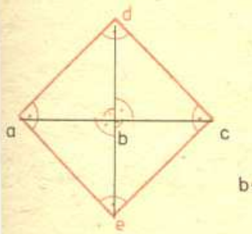
$$ab \equiv cd \leftrightarrow \bigvee ee'(\vdots(aec) \wedge \vdots(bee') \wedge e'c \equiv cd).$$

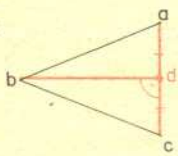
Nie tylko relacja trójkąta równoramiennego może być jedyną relacją pierwotną. Innym przykładem takiej relacji jest *kąt prosty* wspomiany już powyżej. Za pomocą tego pojęcia można zdefiniować relację środka:

$$\vdots(abc) \leftrightarrow \bigvee ed(\llcorner(abd) \wedge \llcorner(abe) \wedge \llcorner(cbd) \wedge \llcorner(cbe) \wedge \llcorner(adc) \wedge \llcorner(dce) \wedge \llcorner(cea) \wedge \llcorner(ead)),$$

a to wystarcza do zdefiniowania relacji Pieriego

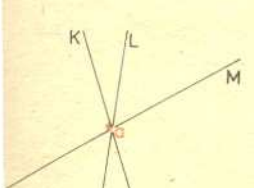
$$ab \equiv bc \leftrightarrow \bigvee d(\vdots(adc) \wedge \llcorner(adb)).$$





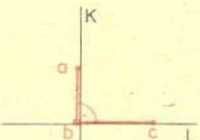
Skoro chcemy zdefiniować w systemie Tarskiego pojęcia systemu Hilberta, to nie możemy ograniczyć się do definiowania relacji. Musimy jeszcze zdefiniować proste i płaszczyzny. Zaczniemy od funkcji $L(ab) = \{c : L(abc)\}$.
Funkcja ta przyporządkowuje parom punktów zbiory punktów. Na przykład jeśli $a = b$, to $L(ab)$ jest zbiorem wszystkich punktów, jeśli jednak $a \neq b$, to $L(ab)$ jest prostą. Pojęcie prostej możemy zatem zdefiniować następująco: zbiór punktów X jest prostą wówczas, gdy istnieją takie dwa różne punkty a i b, że $X = L(ab)$ (w tym kontekście X oznacza dowolny zbiór punktów). Przy tak zdefiniowanych prostych relację incydencji można zdefiniować jako relację *należenia*:

$$a \mathrm{I} L \leftrightarrow a \in L.$$



Zdefiniujemy dwie relacje zachodzące pomiędzy prostymi:
Relację *współpękowości*:

$$p(KLM) \leftrightarrow \bigvee a(a \in K \cap L \cap M)$$

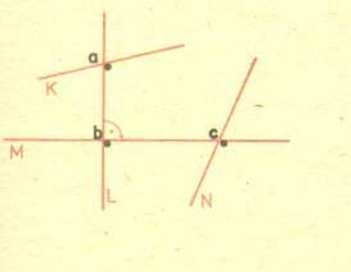


i *prostopadłości*:

$$K \perp L \leftrightarrow \bigvee abc(\llcorner(abc) \wedge a \neq b \neq c \wedge a, b \in K \wedge b, c \in L).$$

Układ: *proste, współpękowość* i *prostopadłość* też może służyć jako układ pojęć pierwotnych. Weźmy bowiem pod uwagę dwie różne proste K i L. Proste te wyznaczają pęk $p(KL) = \{M: p(KLM)\}$. Pęk taki może być pusty (gdy proste są, intuicyjnie rzecz biorąc, równoległe). Pęki niepuste będziemy nazywać właściwymi i oznaczać małymi, lecz półgrubymi literami łacińskimi. Można łatwo zdefiniować pojęcie: pęki $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ tworzą kąt prosty:

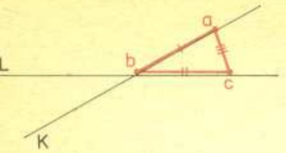
$$\llcorner(\boldsymbol{abc}) \leftrightarrow \bigvee KLMN(L \perp M \wedge \boldsymbol{a} = p(KL) \wedge \boldsymbol{b} = p(LM) \wedge \boldsymbol{c} = p(MN)).$$



W tym momencie chciałoby się już powiedzieć, że to koniec dowodu: zdefiniowaliśmy pojęcia, o których już wiemy, że tworzą układ równoważny układowi Tarskiego. Trudność polega jednak na tym, że nie zdefiniowaliśmy bynajmniej pojęcia punktu, a tylko pojęcie pęku wierzchołkowego i postanowiliśmy te pęki nazywać punktami. Powyższy układ pojęć pierwotnych można uprościć: zamiast relacji współpękowości prostych wystarczy wziąć relację *przecinania się* prostych, $\times$, gdyż

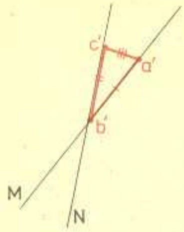
$$p(KLM) \leftrightarrow K \times L \times M \times K \wedge \bigvee PQ(K \perp P \perp L \perp Q \perp M \wedge P \times Q).$$

Ciekawe, że definicja ta jest istotnie przestrzenna. Można udowodnić, że w geometrii płaskiej relacja współpękowości nie daje się zdefiniować za pomocą żadnego układu relacji dwuargumentowych. Natomiast autor nie wie, czy relacja przecinania jest w przypadku geometrii przestrzennej naprawdę potrzebna, tzn. czy nie można jej zdefiniować za pomocą relacji przecinania się pod kątem prostym.



W hilbertowskim układzie pojęć pierwotnych relacja przystawania może zachodzić dla dwu par prostych (przecinających się). Musimy zatem rozszerzyć relację przystawania na pary prostych:

$$KL \equiv MN \leftrightarrow \bigvee abca'b'c'(a \neq b \neq c \wedge a, b \in K \wedge b, c \in L \wedge a', b' \in M \wedge b', c' \in N \wedge ab \equiv$$
$$\equiv a'b' \wedge bc \equiv b'c' \wedge ca \equiv c'a').$$



Wreszcie pozostaje nam do zdefiniowania pojęcie płaszczyzny w terminach pojęć Tarskiego. W tym celu wprowadzimy najpierw pojęcie symetralnej odcinka: $P(a, b) = \{c : ac \equiv cb\}$. Płaszczyzny są to akurat symetralne odcinków niezdegenerowanych, a więc odcinków, których końce nie są tym samym punktem. Mówimy, że punkt a leży na płaszczyźnie α, gdy do niej należy:

$$a\,\mathrm{I}\,\alpha \leftrightarrow a \in \alpha,$$

a prosta L na niej leży, gdy się w niej zawiera:

$$L\,\mathrm{I}\,\alpha \leftrightarrow L \subseteq \alpha.$$

W ten sposób przekonaliśmy się, że układów pojęć pierwotnych dla geometrii może być dużo. Wszystkie układy wspomniane powyżej są równoważne układowi Hilberta, to znaczy: pojęcie jest definiowalne w układzie pojęć pierwotnych Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy jest definiowalne w układzie Tarskiego (Pieriego, etc.).
Powyższe wyliczenie nie wyczerpuje oczywiście wszystkich możliwych układów pojęć pierwotnych dla geometrii euklidesowej. Nie wyczerpuje również wszystkich znanych, a nawet wszystkich ciekawych. Na dowód pokażemy jeszcze dwa przykłady. Pierwszy z nich pochodzi w zasadzie od Friedricha Bachmanna (1951). Składa się on z pojęć: izometria i złożenie. Przez izometrię rozumie się tu dowolne przekształcenie przestrzeni na siebie, które spełnia warunek

$$\bigwedge ab(ab \equiv \Gamma a \Gamma b).$$

Izometrie będziemy oznaczać dużymi literami greckimi. Złożenie przy tym rozumiemy jako złożenie (superpozycję) funkcji. Jest to tym ciekawszy układ pojęć, że traktuje geometrię jako teorię pewnych, bardzo szczególnych, grup — grup izometrii. (Jak wiadomo, wszystko w matematyce jest algebrą!) Aby to wykazać, trzeba zdefiniować w tej grupie pojęcia jakiegoś układu równoważnego układowi Hilberta. Wyróżnijmy najpierw wśród izometrii inwolucje — to znaczy izometrie, które są same do siebie odwrotne, ale jednak różne od przekształcenia tożsamościowego:

$$\Gamma \neq 1 \wedge \Gamma\Gamma = 1.$$

(1 oznacza tu przekształcenie tożsamościowe). Zauważmy przy tym, że wśród izometrii inwolucjami są tylko symetrie (środkowe, osiowe i płaszczyznowe). Wprowadźmy oznaczenie

$$A|\Omega \leftrightarrow A\Omega = \Omega A$$

(gdy $A|\Omega$, mówimy, że izometrie A i Ω są przemienne). Niech teraz Γ, Γ' będą różnymi symetriami o środkach (odpowiednio) a i a', Δ, Δ' — różnymi symetriami o osiach K, K', zaś Ξ, Ξ' — różnymi symetriami względem płaszczyzn α, α'. Wówczas nie może zachodzić $\Gamma|\Gamma'$, $\Gamma|\Delta$ oznacza że a leży na K, $\Gamma|\Xi$ — że a leży na α, $\Delta|\Xi$ — że K leży na α lub K jest prostopadła do α, $\Delta|\Delta'$ — że proste K i K' przecinają się pod kątem prostym, wreszcie $\Xi|\Xi'$ — że α i α' są prostopadłe. Łatwo więc zauważyć, że Γ jest symetrią osiową wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje izometria Δ taka, że dowolne dwie inwolucje Γ', Δ' które są jednocześnie przemienne z Γ i z obrazem Γ przy izometrii Δ (a więc i z inwolucją $\Delta\Gamma\Delta^{-1}$) muszą same być przemienne. Ponieważ symetrie osiowe można identyfikować z ich osiami, można zatem uważać, że zdefiniowaliśmy pojęcie prostej. Będziemy więc dalej oznaczać symetrie osiowe dużymi literami łacińskimi.
Relację przecinania się pod kątem prostym zdefiniować jest bardzo łatwo:

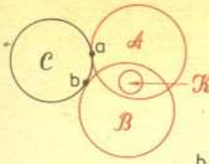
$$K \perp L \leftrightarrow K|L \wedge K \neq L.$$

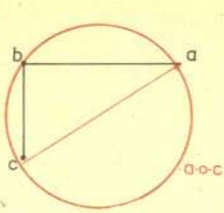
Nieco trudniej zdefiniować relację przecinania pod dowolnym kątem: dwie proste przecinają się wówczas, gdy są równe lub istnieją dokładnie trzy inwolucje przemienne z każdą z nich. W ten sposób pokazaliśmy, że geometrię można rozpatrywać jako teorię pewnych, specjalnych, grup.
Ostatnim układem, jaki zostanie tu przedstawiony jest geometria brył, pochodząca od Tarskiego (1929). Składają się na nią pojęcia: kula otwarta oraz zawieranie. Najpierw jednak omówimy modyfikację tego układu pochodzącą od Jaśkowskiego (1949). Modyfikacja polega na zastąpieniu pojęcia kuli otwartej przez pojęcie kuli domkniętej (wraz z brzegiem). Kule (w zależności od potrzeby domknięte lub otwarte) będziemy oznaczać literami ozdobnymi, a relację zawierania znakiem $\subseteq$.
Wśród kul domkniętych łatwo wyróżnić *punkty*. Są to kule minimalne, nie zawierające innych, to znaczy spełniające warunek:

$$\text{dla dowolnego } \mathcal{B} : \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} = \mathcal{A}.$$

Będziemy je zatem oznaczać małymi literami łacińskimi. Następnie zdefiniujemy relację *zewnętrznej styczności*

$$\mathcal{A} \infty \mathcal{B} \leftrightarrow \text{istnieje dokładnie jedno } \mathcal{C}\text{, takie że } \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}, \mathcal{B}$$





i *leżenia punktu na brzegu*

$$a\dot{\bigcirc}\mathscr{A} \leftrightarrow a\infty\,\mathscr{A} \wedge \bigvee\mathscr{B}(a\infty\mathscr{B}\infty\mathscr{A}) \wedge \mathscr{B} \neq a)$$

Dowolne dwa punkty a, b wyznaczają kulę, w której leżą na końcach średnicy:

$$a\cdot\bigcirc\cdot b = \mathscr{C} \leftrightarrow a, b\,\dot{\bigcirc}\,\mathscr{C} \wedge \sim[\bigvee\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{K}(a \subseteq \mathscr{A} \wedge b \subseteq \mathscr{B} \wedge \mathscr{A}\infty\mathscr{C}\infty\mathscr{B} \wedge \mathscr{K} \subseteq \mathscr{A} \wedge \mathscr{K} \subseteq \mathscr{B})]$$

Wreszcie możemy zdefiniować relację kąta prostego dla punktów:

$$\llcorner(abc) \leftrightarrow b\dot{\bigcirc}(a\cdot\bigcirc\cdot c).$$

Zatem układ pojęć piewotnych zaproponowany przez Jaśkowskiego jest równoważny układowi Hilberta.

Z układem Tarskiego jest nieco trudniej. Zauważmy jednak, że część wspólna zstępującego (nieskończonego) ciągu kul otwartych jest zawsze kulą domkniętą. Mówi się wówczas, że ów ciąg jest zbieżny do kuli domkniętej. Niech $\{\mathscr{A}_n\}$ będzie zbieżny do $\mathscr{A}$ i $\{\mathscr{B}_n\}$ — do $\mathscr{B}$. Wówczas

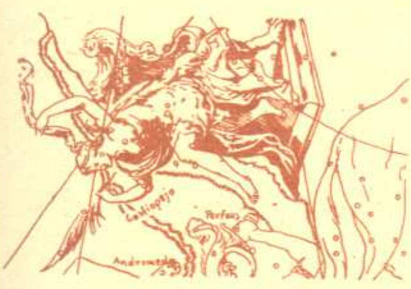
$$\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B} \leftrightarrow \bigwedge n \bigvee m(\mathscr{A}_n \subseteq \mathscr{B}_m).$$

W takiej sytuacji będziemy pisać $\{\mathscr{A}_n\} \subseteq \{\mathscr{B}_n\}$. Dwie kule, które się nawzajem zawierają, muszą być równe, zatem trzeba przyjąć, że jeśli $\{\mathscr{A}_n\} \subseteq \{\mathscr{B}_n\} \subseteq \{\mathscr{A}_n\}$, to oba ciągi są zbieżne do tej samej kuli. Możemy więc przyjąć, że kulą domkniętą jest klasa ciągów zstępujących kul otwartych zbieżnych do tej samej kuli. W rezultacie zdefiniowaliśmy w układzie Tarskiego pojęcia układu Jaśkowskiego. Ponieważ zdefiniowanie kuli otwartej w układzie Hilberta nie przedstawia trudności, więc można uznać, że również i system geometrii brył jest równoważny układowi Hilberta.

Na zakończenie zauważmy ciekawą własność systemu geometrii brył: umożliwia ona traktowanie geometrii jako teorii pewnych porządków częściowych. Nic w tym zresztą dziwnego; nie tylko geometria, ale cała matematyka jest porządkiem (częściowym).

Ważnym problemem w badaniu rzeczywistości jest pytanie, jak ją opisać. Chodzi tu, wbrew pozorom o dwie zupełnie różne sprawy. Po pierwsze musimy wybrać, jaki aspekt realnego świata będziemy poznawali — tu dokonuje się podział na dyscypliny naukowe. Jest jednak jeszcze i drugie pytanie — w jakim języku. Ludzie badający nasze dokonania i możliwości w tym zakresie uprawiają, jak przyjęto mówić, podstawy danej dyscypliny. Warto więc zwrócić uwagę na fakt, że dla autora poniższego artykułu proste, punkty, kąty, odcinki itp. to jednoznaczne, realne obiekty. A jeśli definiuje jedne z nich za pomocą drugich, to dlatego, że bada problem w jakich językach dyscyplinę, której podstawy uprawia — geometrię — można opisać w sposób pełny. Definiując nie kreuje bytów, a nazywa w różnych językach stwierdzając tym samym ich przydatność do uprawiania geometrii.

Patrz w niebo



Wśród górujących na październikowym niebie gwiazdozbiorów łatwo jest zauważyć charakterystyczną konstelację Kasjopei, tworzącą nieco skrzywioną literę W. W najbliższych dniach, 7 listopada minie rocznica zjawiska, które miało duży wpływ na rozwój astronomii nie tylko XVI i XVII w. Tego dnia 1572 roku W. Shuler zauważył w gwiazdozbiorze Kasjopei „nową gwiazdę", która potem okazała się najjaśniejszą supernową od 500 lat. W ciągu następnych kilku dni była ona obserwowana przez wielu znanych astronomów tamtych lat. Wiele czasu poświęcił jej Tycho de Brahe, pisał on o „nowej gwieździe" mniej więcej w tych słowach:

„Jedenastego dnia listopada po zachodzie Słońca... podziwiałem gwiazdy na bezchmurnym niebie ... zauważyłem, że nowa, niezwykła gwiazda przewyższająca pozostałe swoją jasnością, świeci prawie dokładnie nad moją głową; a ponieważ znałem od dzieciństwa dokładnie wszystkie gwiazdy na niebie, było dla mnie oczywiste, że w tym miejscu żadna, nawet najmniejsza gwiazda nigdy nie świeciła, nie mówiąc już o tak wyraźnej i jasnej jak ta. Byłem tak zdziwiony tym widokiem, że przez chwilę wątpiłem w wiarygodność moich oczu. Kiedy stwierdziłem, że inni, po wskazaniu im miejsca, również widzieli tam gwiazdę, nie miałem dalszych wątpliwości. Był to prawdziwy cud, jakiego nikt nigdy nie widział od początku świata".

W uznaniu dużego wkładu pracy w wyznaczeniu jasności i dokładnego położenia gwiazdy (z dokładnością do 30″ bez lunety, którą wynaleziono kilkadziesiąt lat później) nazywa się ją często gwiazdą Tychona (lub *B Cassiopeia*).

Przez dwa tygodnie gwiazda przewyższała jasnością wszystkie gwiazdy na niebie i była widoczna nawet w ciągu dnia. W końcu listopada zaczęła słabnąć i zmieniać kolor. Na początku biała, zaczęła żółknąć, a w końcu, coraz bardziej pomarańczowa a potem czerwona, znikła z zasięgu wzroku w marcu 1574 r.

Dzięki badaniom radiowym przeprowadzonym w latach sześćdziesiątych naszego wieku udało się odnaleźć pozostałość po potężnym wybuchu, jaki wstrząsnął gwiazdą 400 lat temu. Pozostała ciemna mgławica emitująca fale radiowe, rozszerzająca się w przestrzeń z ogromną, nawet na warunki kosmiczne, prędkością 9000 km/s.

Dzisiaj coraz lepiej rozumiemy, co jest przyczyną tak silnych eksplozji, mogących rozerwać całą gwiazdę. Mimo, że wiele szczegółów jest ciągle niejasnych i numeryczne modele często „nie chcą wybuchać", ogólny obraz jest coraz jaśniejszy — napiszemy o nim w jednym z najbliższych numerów.

Mgr Tomasz CHLEBOWSKI