O analogiach, algebrach i przestrzeniach

Dr Wiktor BARTOL

Dla dowolnych elementów $a, b, c \in B$:

1) $a+b = b+a$
2) $a \cdot b = b \cdot a$
3) $a+(b+c) = (a+b)+c$
4) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
5) $a+(a \cdot b) = a$
6) $a \cdot (a+b) = a$
7) $a+(b \cdot c) = (a+b) \cdot (a+c)$
8) $a \cdot (b+c) = (a \cdot b)+(a \cdot c)$
9) $(a+(-a)) \cdot b = b$
10) $(a \cdot (-a))+b = b$

Powiadają, że dobry matematyk potrafi dowodzić własności pewnych pojęć, wybitny — potrafi dostrzec analogie między pojęciami, genialny — dostrzega analogie między analogiami. O pewnych analogiach właśnie, których zauważenie i ujęcie w ścisłe ramy matematycznego opisu i rozumowania zawdzięczamy matematykom wybitnym i genialnym, będzie mowa w niniejszym artykule. W latach 1847 i 1854 George Boole, angielski matematyk samouk, opublikował dwie prace (których tytuły przywodzą na myśl XIX-wieczne biblioteki, pełne grubych tomów oprawnych w skóry): ,,*The mathematical analysis of logic, being an essay towards a calculus of deductive reasoning*" (czyli ,,*Matematyczna analiza logiki, będąca próbą opisu rachunku rozumowania dedukcyjnego*") i ,,*An investigation of the laws of thought, on which are founded the mathematical theories of logic and probability*" (czyli ,,*Badanie praw myślenia, na których opierają się matematyczne teorie logiki i prawdopodobieństwa*"), w których wskazał na to, że działania na zdaniach logicznych podlegają podobnym prawom formalnym co działania na zbiorach. Spostrzeżenie to spowodowało, że od drugiej połowy XIX wieku wiele uwagi poświęcono tzw. algebrom Boole'a. Algebrą Boole'a jest każdy system $(B, +, \cdot, -)$ złożony z niepustego zbioru B, z dwóch operacji (działań) dwuargumentowych $+$ i $\cdot$ oraz jednej operacji jednoargumentowej $-$, spełniających wypisane na marginesie warunki.

Jeśli zbiorem B będzie zbiór wartości logicznych $\{0, 1\}$, a operacjami na 0 i 1 będą działania odpowiadające kolejno alternatywie, koniunkcji i negacji zdań, to wszystkie powyższe warunki będą spełnione, a taka algebra Boole'a będzie stanowiła pełny opis rachunku zdań.

Podobnie warunki 1) — 10) będą zachowane, gdy B będzie rodziną wszystkich podzbiorów pewnego ustalonego zbioru X, a operacjami będą odpowiednio: suma, iloczyn zbiorów oraz dopełnienie zbioru w X. Algebrę Boole'a, której elementami są zbiory, a operacjami właśnie suma, iloczyn i dopełnienie teoriomnogościowe (czyli ,,zwykłe" działania na zbiorach) nazywa się ciałem zbiorów. Oczywiście nie każda algebra Boole'a jest ciałem zbiorów: algebra opisująca rachunek zdań ciałem zbiorów przecież nie jest, a każda książka o algebrach Boole'a dostarczy zainteresowanemu czytelnikowi wielu przykładów różnych algebr. Pojęcie algebry Boole'a jest więc formalizacją analogii między wieloma różnymi systemami; każda własność dająca się wywieść w sposób formalny (tj. bez wnikania w to, czym są elementy zbioru B, ani w znaczenie symboli ,,+", ,,·" i ,,−") z warunków 1) — 10) przysługuje każdemu takiemu systemowi, każdej algebrze Boole'a.

Okazuje się jednak, że ciała zbiorów są najbardziej typowymi algebrami Boole'a. W latach trzydziestych naszego wieku amerykański matematyk M. H. Stone pokazał, że każda algebra Boole'a jest izomorficzna z pewnym ciałem zbiorów. Naszkicujmy pokrótce rozumowanie, na którym opiera się dowód tego twierdzenia: Niech $(B, +, \cdot, -)$ będzie dowolną algebrą Boole'a. Podzbiór F zbioru B taki, że zawsze, gdy $a, b \in F$ oraz $c \in B$, to $a \cdot b \in F$ i $a+c \in F$, nazwiemy *filtrem* w B. Filtr F jest *maksymalny*, jeśli jedynym zawierającym go i różnym od niego filtrem w B jest cały zbiór B. Niech $\mathscr{F}_B$ oznacza rodzinę wszystkich filtrów maksymalnych w algebrze $(B, +, \cdot, -)$. Przyporządkujmy każdemu elementowi $a \in B$ zbiór $f(a)$ złożony dokładnie ze wszystkich filtrów maksymalnych, do których należy element a; $f(a)$ jest więc zawsze podzbiorem zbioru $\mathscr{F}_B$. Można wykazać, że takie przyporządkowanie jest wzajemnie jednoznaczną funkcją ze zbioru B na rodzinę $\{f(a): a \in B\}$ wszystkich podzbiorów zbioru $\mathscr{F}_B$ postaci $f(a)$. Ponadto, $f(a+b) = f(a) \cup f(b)$, $f(a \cdot b) = f(a) \cap f(b)$ oraz $f(-a) = \mathscr{F}_B - f(a)$. Przyporządkowanie f jest więc izomorfizmem algebry $(B, +, \cdot, -)$ na ciało zbiorów $(\{f(a): a \in B\}, \cup, \cap, -)$. Twierdzenie Stone'a oznacza, że każda algebra Boole'a może być reprezentowana przez pewne ciało zbiorów, które ma dokładnie te same własności algebraiczne co algebra wyjściowa. Stąd np. jeśli chcemy sprawdzić prawdziwość jakiejś równości (w której występują symbole operacji algebry Boole'a) dla dowolnych elementów dowolnej algebry Boole'a, to wystarczy przekonać się, czy równość ta jest prawdziwa dla dowolnych zbiorów, interpretując operacje jako odpowiednie działania na zbiorach.

Opuśćmy na chwilę ciała zbiorów i algebry Boole'a i wejdźmy w inny świat pojęć.

W początkach XX wieku powstała i rozwijała się (przy dużym zresztą udziale matematyków polskich) dziedzina matematyki nazwana topologią, której przedmiotem badań są tzw. przestrzenie topologiczne. Przestrzenią topologiczną jest każdy zbiór X z wyróżnioną rodziną $\mathscr{O}$ jego podzbiorów taką, że zbiór pusty $\emptyset$ oraz cały zbiór X należą do $\mathscr{O}$, a ponadto suma dowolnej rodziny zbiorów z $\mathscr{O}$ i iloczyn dowolnej skończonej rodziny zbiorów z $\mathscr{O}$ także do $\mathscr{O}$ należą. Zbiory należące do $\mathscr{O}$ nazywa się zbiorami otwartymi w X, a ich dopełnienia — zbiorami domkniętymi (zauważmy, że dopełnienie zbioru domkniętego jest znów zbiorem otwartym). I tak np. przestrzenią topologiczną jest zbiór R wszystkich liczb rzeczywistych, w którym wyróżnioną rodziną zbiorów otwartych jest rodzina wszystkich takich podzbiorów zbioru R, które są sumami przedziałów otwartych na prostej (zbiór pusty uważamy za przedział otwarty). Przestrzenią topologiczną jest także każdy zbiór X, w którym rodziną zbiorów otwartych jest rodzina wszystkich podzbiorów tego zbioru: każdy podzbiór zbioru X jest zatem w tej przestrzeni zbiorem otwartym, a jednocześnie każdy jest zbiorem domkniętym. Taką przestrzeń nazywa się przestrzenią dyskretną; ale nie tylko w przestrzeniach dyskretnych istnieją podzbiory, będące jednocześnie zbiorami otwartymi i domkniętymi. W każdej przestrzeni topologicznej X takimi zbiorami (nazwijmy je otwarto-domkniętymi) są zbiór $\emptyset$

Dualność na PKP

Jak wiadomo, każdy pociąg powinien mieć swój pociąg dualny — ten kursujący ,,z powrotem". Pociągi dualne nazywają się tak samo (,,Kopernik", ,,Portowiec", ,,Górnik", ,,Tatry", ,,Beskidy" ...), mają jednak różne numery. Łatwo sprawdzić, że dualizacja pociągu pospiesznego też jest pospieszna, sezonowego — sezonowa, przy czym sezony są co najwyżej przesunięte o 1 dobę. A oto problemy do samodzielnego rozwiązania:

1) Jaka reguła rządzi numerowaniem pociągów dualnych
a) kursujących w obrębie tej samej Dyrekcji DOKP,
b) kursujących między różnymi Dyrekcjami;

2) Dlaczego dualizacja pociągu ,,Beskidy" relacji Warszawa Wschodnia—Bielsko-Biała (planowy odjazd 14.03) jest pociągiem ,,Beskidy" relacji Gliwice—Warszawa Wschodnia. Co robią w Bielsku z takim nadmiarem wagonów (kilka tysięcy rocznie)?

Literatura pomocnicza: *Urzędowy Rozkład Jazdy Pociągów* 1980/81, Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa 1980.

THEY ARE COMING TO TAKE ME AWAY
HA.HA.HI.HI..

RZECZYWISTOSC JEST NIEPOMIERNIE ZŁOŻONA, a poznanie nasze zbyt jest subiektywne, abyśmy spostrzegając światło umieli zdecydowanie ocenić, gdzie znajduje się jego źródło - w świecie zewnętrznym, w naszym oku, czy może jest to jedynie doznanie naszego mózgu?

Wielu zatem trzeba dokonać selekcji, aby tak ograniczyć zakres naszych badań, tak określić pojęcia, tak sformułować pytania, tak zawęzić odpowiedzi, abyśmy sami zyskali wrażenie, że coś na temat świata zostało powiedziane nam czy przez nas /gdyż to ostatnie rozróżnienie najmniej jest ważne i znaczące/.

Mamy wówczas do czynienia z teorią, która cieszy nas tak długo, aż ten czy ów zbawczy czynnik nasunie nam spostrzeżenie: rzeczywistość jest niepomiernie złożona względem uproszczonego opisu, jakim dysponujemy /cóż za bałwan z tego Kopernika, Newtona, Darwina, Marksa, Cerwantesa czy Łysenki!/.

Uwzględniamy więc wszelkie wyjątki, niuanse, subtelności; bierzemy pod uwagę takie niewątpliwe wartości, jak indywidualne upodobania, subiektywne wrażenia, intuicje i apetyty, aby nareszcie osiągnąć stan wstępny naszych rozważań i doformułować: RZECZYWISTOSC JEST NIEPOMIERNIE ZŁOŻONA i nic pewnego nie da się o niej powiedzieć.

"... i już zaczęło się przedstawienie.

Przycichła nieco orkiestra dęta.
Na scenę weszli duńscy książęta;

chłopy jak byki z grzywą na karkach,
przy kordelasach i przy zegarkach.

Bo po co aktor płacze i skamle,
że tylko on jest jedyny Hamlet?

Dobra Dyrekcja, by te łzy otrzeć,
zadaptowała sztukę samotrzeć.

Zamiast dwudziestu pięciu postaci
sami Hamleci byli w dramacie.

Na diabła Grabarz z tą Ofeliją!
Chcą grać chłopaki, niech się wyżyją.

W ten sposób szlagier pierwszy raz
w świecie!
Grali w "Hamlecie" sami Hamleci.

Ręka na sercu. Twarze ponure.
"Być albo nie być" wołali chórem."

"Chryzostoma Bulwiecia podróż do
Ciemnogrodu"
K.I. Gałczyński

i zbiór X — otwarte z definicji przestrzeni topologicznej, domknięte — bo są nawzajem swoimi dopełnieniami.

Niech $\mathcal{OD}$ będzie rodziną wszystkich otwarto-domkniętych podzbiorów pewnej (dowolnej) przestrzeni topologicznej X. Jeśli $A, B \in \mathcal{OD}$, to $A \cup B$ jest zbiorem otwartym, gdyż jest sumą dwóch zbiorów otwartych; jednocześnie $-A$ i $-B$ (będąc dopełnieniami zbiorów domkniętych), a więc także $-A \cap -B$, są zbiorami otwartymi, skąd wynika, że zbiór $A \cup B$ (równy zbiorowi $-(-A \cap -B)$ na mocy praw de Morgana) jest zbiorem domkniętym. Okazuje się zatem, że $A \cup B$ jest zbiorem otwarto-domkniętym, gdy A i B są takimi zbiorami. Podobne do powyższego rozumowanie pokazuje, że również zbiór $A \cap B$ jest wówczas otwarto-domknięty. Łatwo także wywnioskować dalej, że jeśli $A \in \mathcal{OD}$, to i $-A \in \mathcal{OD}$. Tak więc suma, iloczyn zbiorów oraz dopełnienie zbioru w X są operacjami w $\mathcal{OD}$, ich wyniki nie wyprowadzają poza tę rodzinę. Oczywiście operacje te spełniają wszystkie warunki 1) — 10). System $(\mathcal{OD}, \cup, \cap, -)$ jest zatem algebrą Boole'a!

Chwila, w której zapomnieliśmy o algebrach Boole'a i ciałach zbiorów okazała się być stosunkowo krótka, rozważania topologiczne doprowadziły nas do znalezienia nowej klasy przykładów takich algebr. Ale czy są to tylko kolejne przykłady? Powróćmy do omówionego wyżej twierdzenia Stone'a. Niech znów $(B, +, \cdot, -)$ będzie dowolną algebrą Boole'a. W zbiorze $\mathcal{F}_B$ wszystkich filtrów maksymalnych w B wyróżnimy rodzinę podzbiorów otwartych $\mathcal{O}$ w ten sposób, że podzbiór S zbioru $\mathcal{F}_B$ należy do $\mathcal{O}$ wtedy i tylko wtedy, gdy S jest sumą pewnej rodziny zbiorów postaci $f(a)$ (mówimy wówczas, że rodzina $\{f(a): a \in B\}$ jest bazą przestrzeni $\mathcal{F}_B$). Nietrudno sprawdzić, że w istocie $\mathcal{F}_B$ z tak wyróżnioną rodziną podzbiorów $\mathcal{O}$ jest przestrzenią topologiczną (zauważmy, że $\emptyset \in \mathcal{O}$ i $\mathcal{F}_B \in \mathcal{O}$, bo $\emptyset$ jest sumą pustej rodziny zbiorów, a $\mathcal{F}_B$ jest sumą rodziny wszystkich zbiorów postaci $f(a)$).

Z określenia rodziny $\mathcal{O}$ widać, że w szczególności każdy ze zbiorów $f(a)$ jest zbiorem otwartym; jednocześnie każdy z nich jest zbiorem domkniętym, bo dopełnieniem zbioru $f(a)$ jest zbiór otwarty $f(-a)$. Zbiory te są więc otwarto-domknięte i są to wszystkie otwarto-domknięte podzbiory w opisywanej przez nas przestrzeni $\mathcal{F}_B$. Przestrzeń, która ma bazę złożoną ze zbiorów otwarto-domkniętych nazywa się przestrzenią całkowicie niespójną — taka jest właśnie nasza przestrzeń. Ma ona ponadto następujące ciekawe własności:

a) dla dowolnych dwóch różnych elementów F i G tej przestrzeni istnieją dwa rozłączne zbiory otwarte P i S takie, że $F \in P$ i $G \in S$ (inaczej mówiąc, każde dwa różne elementy tej przestrzeni można rozdzielić rozłącznymi zbiorami otwartymi),

b) z dowolnej rodziny zbiorów otwartych, których sumą jest cała przestrzeń, można wybrać rodzinę skończoną, której sumą jest także cała przestrzeń.

Przestrzenie mające własność **a)** nazywa się przestrzeniami Hausdorffa, przestrzenie mające własność **b)** — przestrzeniami zwartymi. Wreszcie — całkowicie niespójne, zwarte przestrzenie Hausdorffa określa się mianem przestrzeni Stone'a. Możemy teraz podsumować dotychczasowe rozważania:

Każda algebra Boole'a jest izomorficzna z ciałem wszystkich podzbiorów otwarto-domkniętych pewnej przestrzeni Stone'a.

Tak więc każdej algebrze Boole'a B możemy przyporządkować odpowiadającą jej na mocy twierdzenia przestrzeń Stone'a (oznaczmy ją przez $\mathfrak{S}(B)$); odwrotnie, każdej przestrzeni Stone'a (nie tylko zresztą takim przestrzeniom, jak widzieliśmy poprzednio) można przyporządkować algebrę Boole'a jej podzbiorów otwarto-domkniętych.

Twierdzenie powyższe jest przykładem częstego zjawiska dualizacji w matematyce: pojęcia wyrosłe z różnych gruntów okazują się być wymienne — tak jak wymienne są dwa teksty, z których jeden powstał przez tłumaczenie drugiego na inny język. Do badania algebr Boole'a możemy stosować metody topologiczne, bo każda algebra Boole'a jest — jak mówią matematycy: z dokładnością do izomorfizmu — bazą pewnej przestrzeni Stone'a; do badania pewnych zagadnień topologicznych możemy stosować metody algebraiczne, gdyż baza każdej przestrzeni Stone'a jest algebrą Boole'a (a ogólniej — algebrą taką jest rodzina wszystkich otwarto-domkniętych podzbiorów dowolnej przestrzeni topologicznej). Taka dualizacja (czy wymienność) nie grozi zagubieniem własności w procesie „tłumaczenia": dwie algebry Boole'a A i B są izomorficzne (a więc mają te same własności algebraiczne) wtedy i tylko wtedy, gdy przestrzenie Stone'a $\mathfrak{S}(A)$ i $\mathfrak{S}(B)$ są homeomorficzne (czyli mają te same własności topologiczne).

Oto prosty przykład zastosowania słownika algebraiczno-topologicznego: własność „algebra Boole'a B jest przeliczalna" jest równoważna własności „przestrzeń Stone'a $\mathfrak{S}(B)$ jest metryzowalna". Stosując „słownik" w drugą stronę otrzymujemy twierdzenie następujące: „Przestrzeń Stone'a jest metryzowalna wtedy i tylko wtedy, gdy algebra jej otwarto-domkniętych podzbiorów jest przeliczalna".

Można oczywiście podawać przykłady bardziej złożonych równoważnych własności algebraicznych i topologicznych. Zamiast tego, przytoczmy cytat z książki Paula Halmosa „*Lectures on Boolean Algebras*": „...Dzięki tej teorii można w zasadzie dualizować każdy fakt i każde pojęcie, przekładając fakty i pojęcia algebraiczne na topologiczne i odwrotnie. W prawie każdym przypadku taka dualizacja jest warta zachodu; często jest ona pożyteczna i pouczająca, a już co najmniej — zabawna."