

# Dualizm korpuskularno-falowy

Prof. dr Iwo BIAŁYNICKI-BIRULA,  
członek korespondent PAN

O dualizmie korpuskularno-falowym, umieszczonym w tytule artykułu, będę mówił jedynie w związku z promieniowaniem elektromagnetycznym — strumieniem fotonów. Nie wyczerpie to oczywiście całego tematu, bo dualizm korpuskularno-falowy charakteryzuje także zachowanie się pozostałych mikroobjektów, ale ograniczenie zakresu wykładu umożliwi nam bardziej szczegółowe i głębsze wyjaśnienie podstawowych pojęć i koncepcji.

Fizyka promieniowania elektromagnetycznego zajmuje wyróżnione miejsce w strukturze współczesnej fizyki. Nie ma żadnego innego przykładu tak rozległego zakresu zjawisk fizycznych opisywanego tak doskonale za pomocą jednej uniwersalnej teorii. Światło, z którym obcuje człowiek od zarania swych dziejów i któremu tyle zawdzięcza, stanowi tylko jedną oktawę w widmie promieniowania elektromagnetycznego. Promieniowanie to zostało zbadane w ogromnym zakresie, liczącym kilkadziesiąt oktaw, od bardzo twardych promieni gamma do bardzo długich fal radiowych. Wszystkie przeprowadzone obserwacje i doświadczenia wykazują niezbitcie, że w całym zakresie promieniowania elektromagnetycznym: jego wysyłaniem, pochłanianiem i rozchodzeniem się, rządzą te same prawa fizyczne.

Pora teraz wyjaśnić, co to jest dualizm korpuskularno-falowy i jaka była jego historia.

Termin dualizm pochodzi od łacińskiego słowa *dualis* — podwójny i oznacza dwoistość, czyli występowanie dwóch przeciwstawnych, lecz dopełniających się elementów, cech, aspektów. Na przykład, dualizm jako koncepcja filozoficzna oznacza pogląd, że świat składa się z dwóch przeciwstawnych, dopełniających się pierwiastków: ducha i materii. W naszym przypadku dualizm oznacza że promieniowanie elektromagnetyczne zachowuje się jednocześnie jak rojowisko cząstek i jak fala. Mimo, iż oba te aspekty, cząstkowy i falowy, występują zawsze razem, to w każdym wybranym zakresie widma promieniowania łatwiej jest dostrzec tylko jeden z nich. Z ogromnym trudem można by zaobserwować u promieni gamma ich cechy falowe i równie trudno byłoby wykryć cechy korpuskularne długich fal radiowych.

Tak więc dualizm korpuskularno-falowy, nie tylko jest cechą charakterystyczną promieniowania elektromagnetycznego, ale jest także czymś na kształt kłamry spinającej całe widmo promieniowania. Im dłuższa fala promieniowania tym łatwiej nam dostrzec aspekt falowy; im większa energia fotonów, tym bardziej wyrazisty staje się aspekt korpuskularny.

Historię dualizmu korpuskularno-falowego należy niewątpliwie zacząć od Izaaka Newtona. Newton poświęcił wiele lat na badania w dziedzinie optyki: od czasów studenckich do ostatnich lat swego życia. Wyniki tych badań zebrał w obszernym dziele zatytułowanym „*Optyka*”, wydanym po raz pierwszy w 1704 roku a później wielokrotnie wznawianym w ulepszonych przez autora wersjach. Na podstawie wielu obserwacji i doświadczeń, które szczegółowo opisał w *Optyce*, wiedziony genialną intuicją Newton sformułował teorię światła, która dla współczesnego czytelnika brzmi miejscami prawie jak ekspozycja... dualizmu korpuskularno-falowego. Oczywiście byłoby ogromną przesadą twierdzić, że Newton odkrył fotony, ponieważ nieznanne mu były żadne fakty wymagające wprowadzenia korpuskularnych cech światła. Mimo ogromnego autorytetu naukowego Newtona, jego teoria światła, zwana teorią emisyjną, nie została przyjęta przez ogół fizyków. Dzięki pracom Huyghensa, Fresnela, Younga i Arago, coraz więcej zwolenników zdobywała falowa teoria światła i w połowie XIX wieku powszechnie sądzono, że wszystkie zjawiska opisane i przeanalizowane przez Newtona, a także zjawiska odkryte później, można wyjaśnić przyjmując, że światło jest falą poprzeczną, rozchodzącą się jako fala sprężysta w hipotetycznym ośrodku zwanym eterem. Zagadnienie mechanicznych własności tego ośrodka było najślabszym ogniwem teorii falowej w jej pierwotnej, mechanicznej wersji.

Na to, by wyjaśnić obserwowane fakty: ogromną prędkość, polaryzację fal świetlnych, wpływ ruchu ośrodka materialnego

# Hajta i wišta

Dr Michał SZUREK

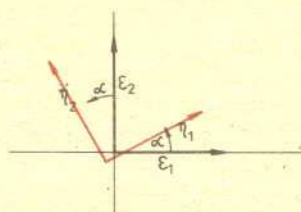
Czy oś liczbowa i linia prosta to to samo? Niezupełnie. Na prostej wszystkie punkty są „takie same” i dopiero gdy umówimy się, że jeden z nich przedstawia liczbę 0, a inny liczbę 1 — możemy zaznaczyć wszystkie inne liczby i nasza prosta staje się właśnie osią liczbową. Każdy punkt ma swoją współrzędną. Podobnie każdy punkt płaszczyzny przedstawia i może być przedstawiony za pomocą pary liczb, ale o tym, które punkty odpowiadają jakim liczbom, decyduje uprzednio dokonany wybór układu współrzędnych (osi i skal na osiach).

Funkcja  $f(x) = x - 2$  przesuwa oś liczbową o dwie jednostki w lewo; początek układu przewędrował do punktu  $-2$ . A jak zmieniły się współrzędne punktów? Oczywiście *zwiększyły się* o 2; inaczej: przesunęły się w prawo o 2 (bo minus to w lewo, a plus — w prawo). To łatwo zrozumieć. Małemu wszystko wydaje się duże, a dużemu — małe.

Przenieśmy się na płaszczyznę. Obróćmy ją o kąt  $\alpha$  w lewo. Jeżeli przez  $x'$  i  $y'$  oznaczymy współrzędne obrazu punktu o współrzędnych  $x, y$ , to

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha, \end{cases}$$

co Czytelnik może łatwo sprawdzić, jeśli nie znał tego przedtem. Nowymi wektorami osi zostały obrócone stare:



Rys. 1  
 $W_1 = [\cos \alpha, \sin \alpha]$   
 $W_2 = [-\sin \alpha, \cos \alpha]$

Skoro zmieniły się osie i wersory układu, to zmieniły się także współrzędne punktów i wektorów. Jak się zmieniły? Skoro układ współrzędnych obrócił się w lewo, to — łatwo zgadnąć — współrzędne „obrócą się” w prawo, a to znaczy, że zmieniają się tak:

$$\begin{aligned} x_{\text{nowe}} &= x_{\text{stare}} \cdot \cos \alpha + y_{\text{stare}} \cdot \sin \alpha \\ y_{\text{nowe}} &= -x_{\text{stare}} \cdot \sin \alpha + y_{\text{stare}} \cdot \cos \alpha. \end{aligned}$$

Kto nie wierzy, niechaj to przeliczy, na przykład tak, jak my w następnym przykładzie tego typu. Rozpatrzmy przekształcenie płaszczyzny opisane wzorem

$$\begin{cases} x' = 2x + 7y \\ y' = x + 4y, \end{cases}$$

czyli o macierzy  $\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ .

Jeżeli przekształcenie  $f$  przestrzeni  $R^n$  w siebie jest opisane wzorami

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ x'_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

to tablicę współczynników  $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$

nazywamy macierzą tego przekształcenia. Wyrażając  $x_1, \dots, x_n$  przez  $x'_1, \dots, x'_n$  (czyli rozwiązując odpowiedni układ równań, jeśli to możliwe), otrzymujemy wzory na przekształcenie odwrotne do  $f$ . Macierz tego przekształcenia odwrotnego nazywamy macierzą odwrotną do  $M$  i oznaczamy przez  $M^{-1}$ .

Niech punkt  $A$  ma współrzędne  $x, y$ , a  $\epsilon_1, \epsilon_2$  niech będą wersorami osi, tj.  $\epsilon_1 = [1, 0]$ ,  $\epsilon_2 = [0, 1]$ . Zatem  $\overline{OA} = x \cdot \epsilon_1 + y \cdot \epsilon_2$ . Przyjmijmy za nowe wektory osi obrazy starych:  $\eta_1 = [2, 1]$ ,  $\eta_2 = [7, 4]$ , czyli

$$(*) \quad \begin{cases} \eta_1 = 2\epsilon_1 + \epsilon_2 \\ \eta_2 = 7\epsilon_1 + 4\epsilon_2. \end{cases}$$

Macierz  $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$  nazywa się transponowaną do  $\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ .

na rozchodzenie się światła i inne, należało przypisać eterowi niespotykane nigdzie i bardzo zagadkowe własności.

Falowa teoria światła przyjęła ostateczną formę w drugiej połowie XIX wieku po odkryciu przez Maxwella poprawnej teorii zjawisk elektromagnetycznych. W 1865 roku Maxwell wydedukował ze swojej teorii istnienie fal elektromagnetycznych rozchodzących się z prędkością światła i mających inne właściwości fal świetlnych. Na tej podstawie Maxwell wysunął hipotezę, że światło jest falą elektromagnetyczną.

Tak powstała falowa, elektromagnetyczna teoria światła, doskonała w swej matematycznej formie i obchodząca się bez kłopotliwego pojęcia eteru. Drgania pola elektromagnetycznego składające się na falę elektromagnetyczną nie wymagały bowiem żadnego przenoszącego je ośrodka: mogły z powodzeniem rozchodzić się w próżni. Maxwell zmarł w 1879 roku nie doczekawszy pełnego doświadczalnego potwierdzenia swojej elektromagnetycznej teorii światła. Dokonał tego Henryk Hertz, wykazując w serii doświadczeń przeprowadzonych w latach 1887—1888, że przewidziane przez Maxwella fale elektromagnetyczne rzeczywiście istnieją w zakresie częstości, który nazywamy obecnie radiowym. Doświadczenia Herta były ukoronowaniem teorii Maxwella i przekonały one ostatecznie fizyków o poprawności tej teorii.

W czasie wykonywania swoich doświadczeń Hertz zauważył, że oświetlenie iskrownika w rezonatorze, służącym do wykrywania fal, promieniowaniem ultrafioletowym, wzmagą przeskakiwanie iskry. Nie potrafił on wyjaśnić tego faktu, który jak dziś wiemy, był wynikiem zjawiska fotoelektrycznego. Zjawisko to stało się punktem wyjścia dla korpuskularno-falowej teorii światła. Mamy tu więc do czynienia z jednym z tych zaskakujących zbiegów okoliczności, w które obfituje historia fizyki. Doświadczenie będące ostatecznym dowodem teorii falowej zawiera już elementy, z których wyłoni się w przyszłości nowa teoria. Warto w tym miejscu zwrócić uwagę na zbieg okoliczności zupełnie innej natury, ale też dotyczący obu omawianych teorii. Twórca falowej, elektromagnetycznej teorii światła, James Clerk Maxwell zmarł w 1879 roku. W tym samym roku urodził się Albert Einstein, który w 1905 roku wykazał, że światło ma naturę ziarnistą i tym samym obalili teorię Maxwella w jej pierwotnej formie.

Koncepcja Einsteina była oparta na hipotezie kwantów energii sformułowanej 5 lat przedtem przez Plancka. W celu wyjaśnienia obserwowanego rozkładu widmowego promieniowania elektromagnetycznego, wysyłanego przez rozgrzane ciała, Planck przyjął, że promieniujące ciało zachowuje się jak zbiór rezonatorów nastrojonych na różne częstości. Energia drgań każdego takiego rezonatora musi być wielokrotnością  $h\nu$ , gdzie  $\nu$  jest częstością drgań a  $h$  nową stałą uniwersalną, zwaną dziś stałą Plancka. Na podstawie tej hipotezy Planck otrzymał wzór na rozkład widmowy promieniowania doskonale zgadzający się z doświadczeniem. Mimo tej zgodności, hipoteza Plancka tak dalece odbiegała od powszechnie przyjętych podówczas koncepcji fizycznych, iż nie tyle została odrzucona, co zignorowana przez większość fizyków.

Einstein posunął hipotezę Plancka znacznie dalej, postulując, że nie tylko jakieś hipotetyczne rezonatory w rozgrzanych ciałach, ale samo promieniowanie elektromagnetyczne o częstości  $\nu$  może nieść energię jedynie w porcjach o energii  $h\nu$ . Było to zdecydowane odejście od tradycyjnej, falowej teorii światła, według której energia fali jest proporcjonalna do kwadratu amplitudy drgań pola i może zatem przyjmować dowolne wartości. Ani w pierwszym artykule Einsteina ani w następnych nie pojawiła się nazwa foton. Taką nazwę dla kwantów promieniowania elektromagnetycznego zaproponował dopiero w 1926 roku mało znany fizyk Lewis.

Einstein użył swojej teorii światła nie tylko do lepszego uzasadnienia wzoru Plancka, ale także do wyjaśnienia prawidłowości występujących w zjawisku fotoelektrycznym. O zjawisku tym wspominaliśmy przy omawianiu doświadczeń Herta, ale było ono później badane bardziej dokładnie.

Według Einsteina zjawisko fotoelektryczne powinno charakteryzować się liniową zależnością energii kinetycznej elektronów wybitych z metalu przez promieniowanie od częstości padającego promieniowania:  $E_{kin} = h\nu - P$ . Linie proste na wykresie funkcji  $E_{kin}(\nu)$  dla różnych metali mogą zaczynać się w różnych miejscach, ze względu na różne prace wyjścia  $P$ , ale ich nachylenie powinno być takie samo, gdyż jest ono wyznaczone przez stałą Plancka. Przewidywania te były zgodne z obserwacjami Lenarda z lat 1902—3, ale dopiero wieloletnie, bardzo dokładne doświadczenia Millikana w pełni potwierdziły przewidywania Einsteina pod względem ilościowym. Doświadczenia te przekonały wszystkich sceptyków, że światło ma także naturę ziarnistą. Rezultatem tych doświadczeń była

Obliczmy, jak zmienia się współrzędne punktu  $A$ . Rozwiązując powyższy układ równań mamy

$$\begin{cases} \epsilon_1 = 4\eta_1 - \eta_2 \\ \epsilon_2 = -7\eta_1 + 2\eta_2, \end{cases}$$

czyli możemy napisać

$$\vec{OA} = x(4\eta_1 - \eta_2) + y(-7\eta_1 + 2\eta_2) = (4x - 7y)\eta_1 + (-x + 2y)\eta_2.$$

a to znaczy, że nowymi współrzędnymi punktu  $A$  są

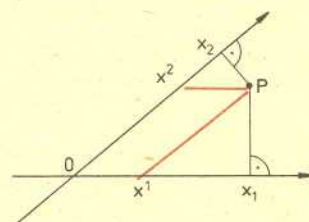
$$\begin{cases} x_{nowe} = 4x - y \\ y_{nowe} = -x + 2y. \end{cases}$$

Współczynniki występujące w powyższym wzorze układają się w macierz  $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$  odwrotną do wyjściowej  $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$ .

Możemy to sformułować tak:

współrzędne punktów płaszczyzny poddanej przekształceniu o macierzy  $A$  zmieniają się zgodnie z macierzą odwrotną do  $A$ . Widzieliśmy to już na przykładach: układ współrzędnych w lewo — współrzędne w prawo, itd. Dlatego też te współrzędne kartezyjańskie noszą dodatkowe określenie: kontrawariantne, co po polsku znaczy „przeciwniennicze” i to chyba wyjaśnia, skąd ta nazwa.

Są i współrzędne kowariantne, *alias* współmiennicze, tj. zmieniające się *zgodnie* z danym przekształceniem układu współrzędnych. Mianowicie położenie punktu  $A$  na płaszczyźnie możemy określić jednoznacznie podając iloczyn skalarne wektora  $\vec{OA}$  przez wektory osi  $\epsilon_1, \epsilon_2$ . Te iloczyny  $\vec{OA} \cdot \epsilon_1, \vec{OA} \cdot \epsilon_2$  są właśnie naszymi współrzędnymi kowariantnymi. Czytelnik, jeśli zechce, bez trudu wykaże, że istotnie, zmieniają się one zgodnie z macierzą występującą we wzorach (\*). Jest to macierz transponowana względem macierzy przekształcenia — a nie odwrotna. Możemy powiedzieć, że poruszający się układ współrzędnych „wleczę za sobą” współrzędne kowariantne punktów (jak się zmieniają wektory, tak i współrzędne),



Rys. 2. Para  $(x^1, x^2)$  tworzy współrzędne kontrawariantne, a  $(x_1, x_2)$  — współrzędne kowariantne punktu  $p$ .

a współrzędne kontrawariantne (kartezyjańskie) odbijają jego ruch jak gdyby w lustrze. Te dwa typy współrzędnych związane są ze sobą jak lewo i prawo, przód i tył czy góra i dół. Spotkaliśmy się z przejawami *dualności*, czy lepiej po polsku: *dwoistości*.

Mamy tu zadanie dla Czytelnika:

Jeżeli  $x_1, x_2$  oznaczają współrzędne kowariantne, a  $x^1, x^2$  — współrzędne kontrawariantne ustalonego punktu, to wielkość  $x_1 x^1 + x_2 x^2$  nie zmienia się przy dowolnej zmianie układu współrzędnych.

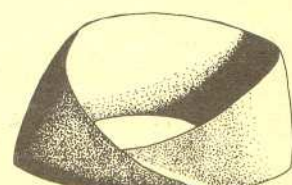
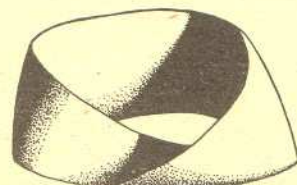
\*

Gdy konserwatywni Anglicy przejdą wreszcie na ruch prawostronny, to czy wystarczy, jeżeli

- 1) powiedzą: jechać prawą stroną!
- 2) odwrócą znaki drogowe i przemalują „zakaz skrętu w prawo” na „zakaz skrętu w lewo” itd.?

\*

Pobawmy się wstęgą Möbiusa. Możemy ją sobie zrobić z paska papieru, obracając jeden z jego końców przed sklejeniem o  $180^\circ$ . A czy mamy obrócić go w prawo czy w lewo? Czy to nie wszystko jedno, skoro *lewo* i *prawo* są dwoiste? Nie, nie wszystko jedno! Oto *prawo* — i *lewostronna* wstęga Möbiusa.



również... nagroda Nobla dla Einsteina w 1921 roku za teorię zjawiska fotoelektrycznego (nie za teorię względności). W dwa lata później Compton w swoich doświadczeniach nad rozpraszaniem promieni X na elektronach wykazał ziarnistą naturę promieniowania elektromagnetycznego także i w tym zakresie widma.

Można powiedzieć, że po tych odkryciach w optyce w pełni zapanował dualizm korpuskularno-falowy. Do opisu pewnych zjawisk (ugięcie fal, interferencja itp.) używano obrazu falowego; do opisu innych (zjawisko fotoelektryczne, jonizacja gazu, zjawisko Comptona itp.) używano obrazu korpuskularnego.

Ze względu na to, że oba te obrazy traktowano jako wykluczające się wzajemnie, sytuacja była wysoce niezadowolająca. Trwała ona jednak przez przeszło 20 lat. Rozwiązanie tego paradoksu przyniosła elektrodynamika kwantowa, która powstała w rezultacie odkrycia przez Heisenberga, Schrödingera, Borna, Jordana i innych mechaniki kwantowej. Podstawy elektrodynamiki kwantowej, sformułowane przez Paula Diraca w 1927 roku, stanowiły rozszerzenie idei mechaniki kwantowej na promieniowanie elektromagnetyczne. Jakiej odpowiedzi dostarcza elektrodynamika kwantowa na pasjonujące fizyków od czasów Newtona pytanie: czy światło jest cząstką czy falą? Można odpowiedzieć żartobliwie, że odpowiedzią jest też pytanie: a dlaczego światło miałoby być albo cząstką albo falą? Pod pojęciami cząstki i fali kryje się przecież tradycyjna treść ukształtowana pod wpływem badań takich obiektów jak kule bilardowe czy fale na wodzie. Klasyczne modele tego typu nadają się, jak się okazuje, do opisu własności fizycznych promieniowania elektromagnetycznego tylko w ograniczonym zakresie ale nie udaje się za ich pomocą opisać wszystkich zjawisk. Sytuacja taka nie jest zresztą w fizyce wcale wyjątkowa. Na przykład, do opisu ruchu Ziemi wokół Słońca wystarcza model punktu materialnego, ale model ten jest zupełnie nieprzydatny do opisu trzęsienia ziemi.

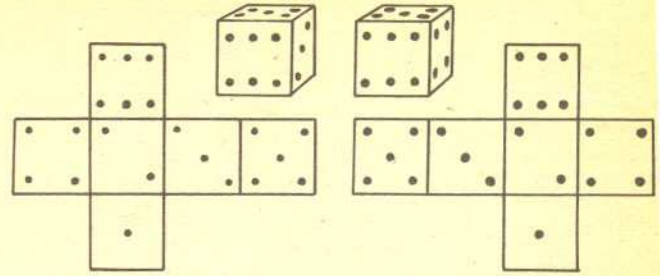
Elektrodynamika kwantowa podaje precyzyjny opis matematyczny promieniowania elektromagnetycznego, z którego wynika także w jakich warunkach możemy używać uproszczonych modeli promieniowania: korpuskularnego i falowego. Kluczem do zrozumienia związku między tymi dwoma opisami jest statystyczny charakter praw kwantowych. W wielkim skrócie, współczesna teoria promieniowania elektromagnetycznego opiera się na następujących tezach. Promieniowanie elektromagnetyczne ma naturę ziarnistą; można sobie wyobrazić, że składa się ono z fotonów o energiach  $h\nu$ . Dla pojedynczych fotonów obowiązują znane z mechaniki zasady zachowania energii, pędu i momentu pędu, zmodyfikowane zgodnie z wymogami teorii względności (fotony poruszają się z prędkością światła). Fotonów nie można jednak wyobrazić sobie w postaci twardych kulek, między innymi dlatego, że posiadają własność zwaną skrętnością, której przejawem jest polaryzacja światła.

Falowa natura światła pojawia się dopiero przy rozpatrywaniu ruchu wielu fotonów, przy czym związek między falą a fotonami ma właśnie charakter statystyczny. Ze zbliżonym obrazem zjawiska mamy do czynienia w przypadku rury Kundta wypełnionej okruchami korka, gdy wzbudzimy w niej stojącą falę dźwiękową. Nie potrafimy przewidzieć, w którym miejscu znajdzie się dany okruh, ale wiemy, iż w węzłach fali wystąpi nagromadzenie okruchów. Podobnie i fala elektromagnetyczna, za pomocą której opisujemy zachowanie się wiązki fotonów pozwala wyznaczyć zagęszczenia i rozrzedzenia fotonów w przestrzeni. Mówiąc bardziej precyzyjnie, prawdopodobieństwo znalezienia fotonu jest proporcjonalne do kwadratu amplitudy drgań pola elektrycznego i magnetycznego fali.

W ten sposób teoria falowa, lub raczej model falowy, promieniowania elektromagnetycznego, podobnie jak kinetyczna teoria materii, pozwala przewidzieć średnie wartości wielkości fizycznych. Jeżeli fotonów w wiązce jest bardzo dużo, to taka umiejętność przewidywania na ogół zupełnie nam wystarcza. Na przykład potrafimy przewidzieć kształt obrazów dyfrakcyjnych i interferencyjnych, choć nie wiemy w jakim kierunku podąży pojedynczy foton. Prostym mechanicznym modelem powstawania określonych obrazów w wyniku statystycznych prawidłowości jest deska Galtona. Nie wiemy bowiem dokąd polecą dane kulki, ale dla dużej liczby kul potrafimy dokładnie przewidzieć ich rozkład.

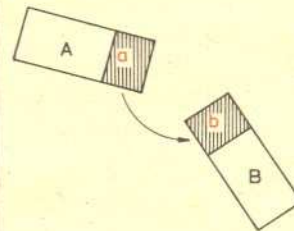
Rozumiemy teraz dlaczego model falowy staje się coraz to lepszy, gdy maleje częstość promieniowania. Fotony o małej częstości mają mniejsze energie i trzeba ich więcej, na to by otrzymać strumień promieniowania o danej całkowitej energii. Z kolei, im więcej fotonów, tym mniej interesujący jest los każdego z nich i jego charakterystyki. Ciekawy jest jedynie opis

A oto: prawo — i lewoskrętna kostka do gry i siatka, z której można je skleić.

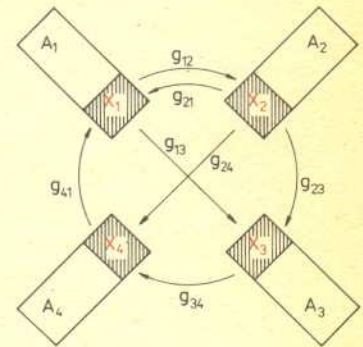


Gdy matematyk pobawi się trochę szczególnymi przykładami, bierze się za ogólną teorię. Więc i my stwórzmy Ogólną Teorię Klejenia.

Polecenie: połącz  $A$  z  $B$ , sklejając  $a$  z  $b$  (rysunek 3), może być wykonane jednoznacznie dopiero wtedy, gdy powiemy wyraźnie jak dokleić  $a$  do  $b$ . Który punkt ma być skleiony z którym. Można powiedzieć, że określamy funkcję  $g: a \rightarrow b$  i sklejamy potem  $x$  z  $g(x)$ .



Rys. 3



Rys. 4

Gdy chcemy połączyć kilka pasków, musimy liczyć się z ewentualnością wielokrotnej nakładki Wyobraźmy sobie, że chcemy połączyć  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , sklejając je wzdłuż ich części  $X_1 \subset A_1, X_2 \subset A_2, \dots, X_n \subset A_n$ . Musimy zatem wyjaśnić, jak dokleić  $X_i$  do  $X_j$ , a więc dla każdych  $i, j$  mamy określić wzajemnie jednoznaczna funkcję  $g_{ij}: X_i \rightarrow X_j$  (rys. 4). No i dobrze. Ale, jeżeli pewien punkt jest skleiony z innym, a ten drugi z trzecim, to i pierwszy z trzecim. To znaczy, że nasze funkcje muszą spełniać warunek

$$g_{jk} \circ g_{ij} = g_{ik} \quad \text{dla każdych } i, j, k.$$

Ponadto  $g_{ij} = g_{ji}^{-1}$  (dlaczego?), skąd wynika (jak?), że  $g_{ii} = \text{id}$ . I oto nasza „teoria klejeń” i jej pierwsze twierdzenie.

Istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy a) sposobami połączenia zbiorów  $A_1, A_2, \dots, A_n$  przez sklejanie ich wzdłuż podzbiorów  $X_i \subset A_i$ ; oraz

b) zespołami  $n^2$  funkcji  $g_{ij}: X_i \rightarrow X_j$  takimi, że

- 1)  $g_{ij} = g_{ji}^{-1}$ ,
- 2)  $g_{jk} \circ g_{ij} = g_{ik}$ ,

$i$  — po przyjęciu  $X_1 = X_2 = \dots = X_n = X$

c) zespołami  $n^2$  funkcji  $g_{ij}: X \rightarrow X$  takimi, że spełnione są 1) i 2) z poprzedniego punktu b.

Taki jak w c) zespół funkcji  $g_{ij}$  nosi bardzo mądrze brzmiącą długą nazwę: *jednowymiarowy kocykl w sensie Čecha układu  $A_1, \dots, A_n$  o współczynnikach w grupie automorfizmów  $X$  i nasze prościutkie twierdzenie „wygląda” teraz doprowadziliśmy Cię: Zbiór wszystkich jednowymiarowych kocykli w sensie Čecha układu  $A_1, A_2, \dots, A_n$  o współczynnikach w grupie automorfizmów  $X$  opisuje wszystkie sklejania zbiorów  $A_1, A_2, \dots, A_n$  wzdłuż  $X$ . I co z tego? — zapyta Czytelnik. Otóż doprowadziliśmy Cię, Czytelniku, do brzegu bardzo szybko rozwijającej się algebry homologicznej, w której jest mowa o cyklach i kocyklach, brzegach i kobrzech, homologiach i kohomologiach, stycznych i kostycznych (to nie dowcip), produktach i koproduktach (też nie żart), kompleksach i kokompleksach (i to nie) oraz o minach i kominach (żart, żart!) a także o*

statystyczny pozwalający przy pomocy modelu falowego na wyznaczanie wartości średnich. I na odwrót, dla dużych częstości energia fotonów jest duża, ich liczba jest nieduża, czasami mamy nawet do czynienia z pojedynczymi fotonami. Dogodny wówczas staje się model korpuskularny, w którym oddziaływanie promieniowania opisujemy jako zderzenia pojedynczych fotonów z innymi cząstkami.

Dysponując nowoczesną aparaturą fizyczną możemy wykonać doświadczenie doskonale ilustrujące podaną wyżej współczesne rozwiązanie dylematu: cząstka czy fala? Wykorzystamy do tego cały laser będący stabilnym źródłem monochromatycznego promieniowania, charakteryzującego się doskonałymi własnościami interferencyjnymi w tradycyjnym sensie teorii falowej. Promieniowanie lasera padającego na ekran możemy wykryć za pomocą czułego fotomnożnika reagującego na pojedyncze fotony. Okazuje się, że rzeczywiste liczba padających fotonów jest proporcjonalna do natężenia fali. Tam gdzie na ekranie widać jasne prążki fotomnożnik wykazuje ogromną liczbę fotonów, zaś tam gdzie widać ciemne miejsca liczba ta jest dużo mniejsza.

Dla wielu fizyków, jednym z nich był sam Einstein, niemożność przewidzenia zachowania się pojedynczych fotonów, czy też ogólnie każdego pojedynczych mikrocząstek: elektronów, protonów itd., jest wadą teorii i świadczy o jej przejściowej roli w rozwoju fizyki. Jest oczywiście prawdą, że mamy tu do czynienia z istotnym ograniczeniem naszej wiedzy o świecie. Nie wiemy dotąd, czy jest to absolutne ograniczenie, czy też w przyszłości potrafimy się od niego uwolnić i podać bardziej szczegółowe niż tylko statystyczne prawa dla ruchu fotonów i innych mikrocząstek. Na razie cieszy nas to, że wszystkie statystyczne przewidywania elektrodynamiki kwantowej pozostają w idealnej zgodności z danymi uzyskanymi w licznych, bardzo precyzyjnych doświadczeniach. Dla ilustracji tej tezy podam, że częstość fali radiowej wysyłanej przez atomy wodoru przy tak zwanym przejściu nadsubtelnym zmierzona w doświadczeniu wynosi 1420,4057517864 MHz, gdzie wszystkie podane cyfry są znaczące. Obliczona teoretycznie wartość zgadza się z dokładnością do jednej milionowej z wartością zmierzoną.

Ta zadziwiająca zgodność teorii z doświadczeniem bardzo krępuje swobodę ruchów fizyków. Wielu z nich chciałoby zmienić teorię, zastępując prawa statystyczne prawami przyczynowymi, które umożliwiłyby dokładne przewidywanie zachowania się fotonów i innych cząstek elementarnych. Jednakże dotąd nie udało się podać żadnej innej teorii mogącej konkurować z teorią kwantową w całym ogromnym zakresie jej zastosowań pod względem precyzji przewidywań i zgodności z doświadczeniem.

Na razie obowiązuje więc ciągle dualizm korpuskularno-falowy rozumiany jako koncepcja, według której cząstki-korpuskuły poruszają się, *średnio*, zgodnie z prawami falowymi.

pniakach i kopniakach (hi, hi). Ale nie igraszki słowne składają się na algebrę homologiczną. Takie jak widzieliśmy kocykle tworzą grupę (przy pewnych słabych dodatkowych założeniach) a z tego taki pożytek, że i sposoby sklejanania tworzą grupę, a z tego taki pożytek, że możemy mieć nadzieję, iż coś tak dziwnego jak klejenie różnymi sposobami może mieć opis algebraiczny, a z tego taki pożytek, że dowiemy się o tym czegoś więcej, a z tego taki pożytek ... oj, wkraczam już na śliski grunt.

\*

Każde chyba pojęcie matematyczne ma swoje ko-pojęcie i ten dualizm ma swój sformalizowany opis w języku teorii kategorii. Mamy więc i kogrupy i koalgebry (że nie wspomnę już o kotangensie). Postaramy się opisać pojęcie „przestrzeni kostycznej” (nazwa nie pochodzi od kości, tylko od styczności). Widzieliśmy już, że na płaszczyźnie (i w każdej przestrzeni  $E^n$ ) można wprowadzić dwa rodzaje współrzędnych: kowariantne (oznaczone przez wskaźniki na dole:  $x_1, x_2, x_3, \dots$ ) oraz kontrawariantne (wskaźniki na górze:  $x^1, x^2, x^3, \dots$ ). Widzieliśmy

też, że liczba  $\sum_{i=1}^n x_i x^i$  zależy tylko od punktu, a nie od układu współrzędnych.

A więc mamy funkcję  $h: V_{\text{kow}} \times V_{\text{kontr}} \rightarrow R$ ; przez  $V_{\text{kow}}$  oznaczaliśmy zbiór współrzędnych kowariantnych,  $V_{\text{kontr}}$  kontrawariantnych. Ma ona następujące własności

- 1)  $h(a+b, c) = h(a, c) + h(b, c)$ ,
- 1')  $h(a, b+c) = h(a, b) + h(a, c)$ ,
- 2)  $h(ra, b) = rh(a, b)$ ,  $a \in V_{\text{kow}}$ ,  $b \in V_{\text{kontr}}$ ,  $r \in R$ ,
- 2')  $h(a, rb) = rh(a, b)$ ,
- 3) jeżeli dla pewnego  $a \in V_{\text{kow}}$  i każdego  $b \in V_{\text{kontr}}$  mamy  $h(a, b) = 0$ , to  $a = 0$ ,
- 3') jeżeli dla pewnego  $b \in V_{\text{kontr}}$  i każdego  $a \in V_{\text{kow}}$  mamy  $h(a, b) = 0$ , to  $b = 0$ .

Przestrzenie, związane funkcją  $h$  o wymienionych powyżej własnościach nazywane są *dualnymi* albo: *sprzężonymi*, o funkcji  $h$  mówimy, że ustala ich dualność.

A więc przestrzeń styczna np. do powierzchni — to dualna do płaszczyzny stycznej do tej powierzchni. Możemy powiedzieć, że przestrzeń styczna do przestrzeni styczna z dualnymi współrzędnymi.

Fatalny brak miejsca w Delcie każe przerwać opowiadanie w tym bardzo ciekawym miejscu. Dlaczego ciekawym? A, bo teraz rozpatrywalibyśmy wiązki styczne, czyli zbiory złożone ze wszystkich przestrzeni stycznych i dualne do nich wiązki kostyczne (czyli zbiory złożone z przestrzeni kostycznych), zobaczylibyśmy, jak są zabawnie względem siebie pokręcone, że co jedna zakręci, to druga odkręci, oraz dostrzeżlibyśmy, jak w tym skomplikowanym świecie pojęć abstrakcyjnych odbija się prosta reguła: układ współrzędnych w lewo — współrzędne w prawo, poprzeczka niżej — poziom usportowania społeczeństwa wyżej, skąpy tata — rozrzutny syn, nudny jeden artykuł — ciekawsze inne.

## Gastronomiczny dowód pewnego twierdzenia o dualności

Zgodnie z panującym w matematyce stylem, zanim powiemy, o co chodzi, sformułujemy kilka definicji. Będziemy więc najpierw rozpatrywać *przestrzeń spożywczą*  $S$ . Jej elementami będą porcje mięsa i ziemniaków; 2 kg mięsa i 3 kg ziemniaków oznaczmy symbolicznie przez  $2m + 3z$  (prosimy nie pytać redakcji, co autor rozumie przez  $-m$  itp.). Wyrażenia  $am + bz$  możemy dodawać, odejmować i mnożyć przez liczby — a więc  $S$  jest przestrzenią liniową; można wyobrazić ją sobie jako płaszczyznę o osiach  $m$  i  $z$  (rysunek).

Każda przestrzeń ma bazę. *Baza* to po prostu układ wektorów podstawowych na osiach. Jak i każdej płaszczyzny, tak i bazą naszej przestrzeni spożywczej  $S$  są wektory  $[1, 0] = 1 \cdot m + 0 \cdot z$  i  $[0, 1] = 0 \cdot m + 1 \cdot z$ .

Produkty spożywcze kupujemy w sklepie. *Sklep* to nic innego jak funkcja przyporządkowująca każdemu elementowi  $s \in S$  pewną liczbę rzeczywiście  $r$  (wulgarnie mówiąc: jego cenę). A więc przestrzeń sklepów składa się ze wszystkich funkcji (liniowych; cena rośnie liniowo względem ilości towaru). Taką przestrzeń nazywamy w matematyce *dualną do* lub *sprzężoną z*  $S$  i oznaczamy przez  $S^*$ . A każdej bazie przestrzeni  $S$  odpowiada dualna do niej baza przestrzeni  $S^*$ . W naszym przypadku (tj. w przestrzeni  $S^*$ ) tworzą ją dwa nieco zwiariowane sklepy MIE oraz ZIE. W pierwszym z nich płaci się tylko za mięso — złotówkę za kilogram. Kartofle dodają tam za darmo, dla zachęcenia ludzi do częstszego odwiedzania sklepu. Natomiast sklep ZIE sprzedaje

