statystyczny pozwalający przy pomocy modelu falowego na wyznaczanie wartości średnich. I na odwrót, dla dużych częstości energia fotonów jest duża, ich liczba jest nieduża, czasami mamy nawet do czynienia z pojedynczymi fotonami. Dogodny wówczas staje się model korpuskularny, w którym oddziaływanie promieniowania opisujemy jako zderzenia pojedynczych fotonów z innymi cząstkami.

Dysponując nowoczesną aparaturą fizyczną możemy wykonać doświadczenie doskonale ilustrujące podanę wyżej współczesne rozwiązanie dylematu: cząstka czy fala? Wykorzystamy do tego cały laser będący stabilnym źródłem monochromatycznego promieniowania, charakteryzującego się doskonałymi własnościami interferencyjnymi w tradycyjnym sensie teorii falowej. Promieniowanie lasera padającego na ekran możemy wykryć za pomocą czułego fotomnożnika reagującego na pojedyncze fotony. Okazuje się, że rzeczywiście liczba padających fotonów jest proporcjonalna do natężenia fali. Tam gdzie na ekranie widać jasne prążki fotomnożnik wykazuje ogromną liczbę fotonów, zaś tam gdzie widać ciemne miejsca liczba ta jest dużo mniejsza.

Dla wielu fizyków, jednym z nich był sam Einstein, niemożność przewidzenia zachowania się pojedynczych fotonów, czy też ogólnie każdych pojedynczych mikrocząstek: elektronów, protonów itd., jest wadą teorii i świadczy o jej przejściowej roli w rozwoju fizyki. Jest oczywiście prawdą, że mamy tu do czynienia z istotnym ograniczeniem naszej wiedzy o świecie. Nie wiemy dotąd, czy jest to absolutne ograniczenie, czy też w przyszłości potrafimy się od niego uwolnić i podać bardziej szczegółowe niż tylko statystyczne prawa dla ruchu fotonów i innych mikrocząstek. Na razie cieszy nas to, że wszystkie statystyczne przewidywania elektrodynamiki kwantowej pozostają w idealnej zgodności z danymi uzyskanymi w licznych, bardzo precyzyjnych doświadczeniach. Dla ilustracji tej tezy podam, że częstość fali radiowej wysyłanej przez atomy wodoru przy tak zwanym przejściu nadsubtelnym zmierzona w doświadczeniu wynosi 1420,4057517864 MHz, gdzie wszystkie podane cyfry są znaczące. Obliczona teoretycznie wartość zgadza się z dokładnością do jednej milionowej z wartością zmierzoną.

Ta zadziwiająca zgodność teorii z doświadczeniem bardzo krępuje swobodę ruchów fizyków. Wielu z nich chciałoby zmienić teorię, zastępując prawa statystyczne prawami przyczynowymi, które umożliwiłyby dokładne przewidywanie zachowania się fotonów i innych cząstek elementarnych. Jednakże dotąd nie udało się podać żadnej innej teorii mogącej konkurować z teorią kwantową w całym ogromnym zakresie jej zastosowań pod względem precyzji przewidywań i zgodności z doświadczeniem.

Na razie obowiązuje więc ciągle dualizm korpuskularno-falowy rozumiany jako koncepcja, według której cząstki-korpuskuły poruszają się, *średnio*, zgodnie z prawami falowymi.

pniakach i kopniakach (hi, hi). Ale nie igraszki słowne składają się na algebrę homologiczną. Takie jak widzieliśmy kocykle tworzą grupę (przy pewnych słabych dodatkowych założeniach) a z tego taki pożytek, że i sposoby sklejania tworzą grupę, a z tego taki pożytek, że możemy mieć nadzieję, iż coś tak dziwnego jak klejenie różnymi sposobami może mieć opis algebraiczny, a z tego taki pożytek, że dowiemy się o tym czegoś więcej, a z tego taki pożytek ... oj, wkraczam już na śliski grunt.

*

Każde chyba pojęcie matematyczne ma swoje ko-pojęcie i ten dualizm ma swój sformalizowany opis w języku teorii kategorii. Mamy więc i kogrupy i koalgebry (że nie wspomnę już o kotangensie). Postaramy się opisać pojęcie ,,przestrzeni kostycznej" (nazwa nie pochodzi od kości, tylko od styczności).

Widzieliśmy już, że na płaszczyźnie (i w każdej przestrzeni E^n) można wprowadzić dwa rodzaje współrzędnych: kowariantne (oznaczone przez wskaźniki na dole: $x_1, x_2, x_3, \ldots$) oraz kontrawariantne (wskaźniki na górze: $x^1, x^2, x^3, \ldots$). Widzieliśmy też, że liczba $\sum_{i=1}^{n} x_i x^i$ zależy tylko od punktu, a nie od układu współrzędnych.

A więc mamy funkcję $h\colon \mathrm{V_{kow}} \times \mathrm{V_{kontr}} \to R$; przez $\mathrm{V_{kow}}$ oznaczyliśmy zbiór współrzędnych kowariantnych, $\mathrm{V_{kontr}}$ kontrawariantnych. Ma ona następujące własności

1) $h(a+b, c) = h(a, c)+h(b, c)$,

1′) $h(a, b+c) = h(a,b)+h(a,c)$,

2) $h(ra,b) = rh(a, b)$, $a \in \mathrm{V_{kow}}$, $b \in \mathrm{V_{kontr}}$, $r \in R$,

2′) $h(a, rb) = rh(a, b)$,

3) jeżeli dla pewnego $a \in \mathrm{V_{kow}}$ i każdego $b \in \mathrm{V_{kontr}}$ mamy $h(a, b) = 0$, to $a = 0$,

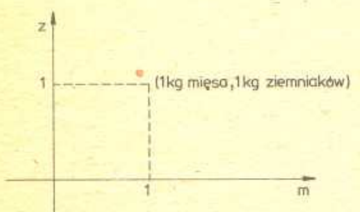
3′) jeżeli dla pewnego $b \in \mathrm{V_{kontr}}$ i każdego $a \in \mathrm{V_{kow}}$ mamy $h(a, b) = 0$, to $b = 0$.

Przestrzenie, związane funkcją h o wymienionych powyżej własnościach nazywane są *dualnymi* albo: *sprzężonymi*, o funkcji h mówimy, że ustala ich dualność.

A więc przestrzeń kostyczna np. do powierzchni — to dualna do płaszczyzny stycznej do tej powierzchni. Możemy powiedzieć, że przestrzeń kostyczna to przestrzeń styczna z dualnymi współrzędnymi.

Fatalny brak miejsca w Delcie każe przerwać opowiadanie w tym bardzo ciekawym miejscu. Dlaczego ciekawym? A, bo teraz rozpatrywalibyśmy wiązki styczne, czyli zbiory złożone ze wszystkich przestrzeni stycznych i dualne do nich wiązki kostyczne (czyli zbiory złożone z przestrzeni kostycznych), zobaczylibyśmy, jak są zabawnie względem siebie pokręcone, że co jedna zakręci, to druga odkręci, oraz dostrzeglibyśmy, jak w tym skomplikowanym świecie pojęć abstrakcyjnych odbija się prosta reguła: układ współrzędnych w lewo — współrzędne w prawo, poprzeczka niżej — poziom usportowienia społeczeństwa wyżej, skąpy tata — rozrzutny syn, nudny jeden artykuł — ciekawsze inne.

Gastronomiczny dowód pewnego twierdzenia o dualności



Zgodnie z panującym w matematyce stylem, zanim powiemy, o co chodzi, sformułujemy kilka definicji. Będziemy więc najpierw rozpatrywać *przestrzeń spożywczą S*. Jej elementami będą porcje mięsa i ziemniaków; 2 kg mięsa i 3 kg ziemniaków oznaczymy symbolicznie przez $2m+3z$ (prosimy nie pytać redakcji, co autor rozumie przez $-m$ itp.). Wyrażenia $am+bz$ możemy dodawać, odejmować i mnożyć przez liczby — a więc S jest przestrzenią liniową; można wyobrażać ją sobie jako płaszczyznę o osiach m i z (rysunek).

Każda przestrzeń ma bazę. *Baza* to po prostu układ wektorów podstawowych na osiach. Jak i każdej płaszczyzny, tak i bazą naszej przestrzeni spożywczej S są wektory $[1, 0] = 1 \cdot m + 0 \cdot z$ i $[0, 1] = 0 \cdot m + 1 \cdot z$.

Produkty spożywcze kupujemy w sklepie. *Sklep* to nic innego jak funkcja przyporządkowująca każdemu elementowi $s \in S$ pewną liczbę rzeczywistą r (wulgarnie mówiąc: jego cenę). A więc przestrzeń sklepów składa się ze wszystkich funkcji (liniowych; cena rośnie liniowo względem ilości towaru). Taką przestrzeń nazywamy w matematyce *dualną do* lub *sprzężoną z S* i oznaczamy przez S^*. A każdej bazie przestrzeni S odpowiada dualna do niej baza przestrzeni S^*. W naszym przypadku (tj. w przestrzeni S^*) tworzą ją dwa nieco zwariowane sklepy MIE oraz ZIE.

W pierwszym z nich płaci się tylko za mięso — złotówkę za kilogram. Kartofle dodają tam za darmo, dla zachęcenia ludzi do częstszego odwiedzania sklepu. Natomiast sklep ZIE sprzedaje ziemniaki po złotemu nie patrząc, ile kto wziął mięsa. Czyli

$$\mathrm{MIE}(1\cdot m) = 1, \quad \mathrm{MIE}(1\cdot z) = 0,$$
$$\mathrm{ZIE}(1\cdot m) = 0, \quad \mathrm{ZIE}(1\cdot z) = 1.$$

Każdy inny rozsądny sklepikarz, biorący a za kilogram mięsa i b za kilogram kartofli, może być opisany jako kombinacja liniowa $a\mathrm{MIE}+b\mathrm{ZIE}$.

Wprowadźmy teraz do rozważań przestrzeń obiadową O. Jej elementy — to obiady, złożone z dań mięsno-ziemniaczanych. Wyróżnimy trzy „bazowe" dania w naszej przestrzeni, wraz z występującymi w nich proporcjami mięso-ziemniaki: k = kartoflanka na podrobach $(1m+7z)$, g = gulasz z ziemniakami $(2m+5z)$, b = krwisty befsztyk + frytki $(3m+z)$. Każdy obiad naszej przestrzeni O jest ich kombinacją liniową $\left(\text{można zjeść pół porcji zupy i trzy befsztyki: } \frac{1}{2}\mathrm{k}+3\mathrm{b},\right.$ lub np. trzy zupy, dwa razy gulasz i ćwierć befsztyka: $\left.3\mathrm{k}+2\mathrm{g}+\frac{1}{4}\mathrm{b} \text{ etc.}\right)$. Na mocy samej definicji przestrzeń O jest trójwymiarowa. Przekonujemy się łatwo, że elementami przestrzeni dualnej O^* są restauracje, gdyż przypisują one ceny swoim obiadom, na ogół dość różnie. Cena obiadu w tej samej restauracji też rośnie liniowo wraz z wielkością porcji.

Musimy teraz rozstrzygnąć, jakie restauracje tworzą bazę dualną do bazy {kartoflanka, gulasz, befsztyk} przestrzeni O. Odpowiedź znajdujemy łatwo: są to knajpy ZU, GU i BE takie, że

$$\mathrm{ZU(z)} = 1, \quad \mathrm{ZU(g)} = 0, \quad \mathrm{ZU(b)} = 0,$$
$$\mathrm{GU(z)} = 0, \quad \mathrm{GU(g)} = 1, \quad \mathrm{GU(b)} = 0,$$
$$\mathrm{BE(z)} = 0, \quad \mathrm{BE(g)} = 0, \quad \mathrm{BE(b)} = 1.$$

W pierwszej z nich płaci się tylko za zupę, objadając się gulaszem i befsztykami ile wlezie, w drugiej tylko gulasz jest w cenie, trzecia liczy sobie po złotówce za jeden befsztyk, nie dostrzegając tłumów pałaszujących z apetytem kartoflankę z gulaszem.

Po wprowadzeniu tych podstawowych pojęć przechodzimy do głównego toku naszych rozważań. Mamy oczywistą funkcję „*receptura*" o argumentach w O a wartościach w S:

$$\mathrm{rec(obiad)} = \mathrm{produkty}.$$

Widzieliśmy, że

$$\mathrm{rec(k)} = 1\mathrm{m}+7\mathrm{z},$$
$$\mathrm{rec(g)} = 2\mathrm{m}+5\mathrm{z},$$
$$\mathrm{rec(b)} = 3\mathrm{m}+\mathrm{z}$$

i widoczne powyżej współczynniki liczbowe układają się w macierz $\begin{bmatrix}1 & 7\\ 2 & 5\\ 3 & 1\end{bmatrix}$. Zwyczajowo jednak ustawia się je tak: $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 7 & 5 & 1\end{bmatrix}$ i taką macierz nazywa się macierzą danego przekształcenia w zadanych bazach obu przestrzeni. Obliczyliśmy więc macierz funkcji „*receptura*".

Każde odwzorowanie liniowe pomiędzy dwiema przestrzeniami liniowymi daje życie odwzorowaniu dualnemu. Wzorem określa się je w ten sposób:

jeżeli $f\colon W \to V$, to f^* jest takim odwzorowaniem V^* w W^*, że dla każdego $w \in W$ mamy $(f^*(v^*))(w) = v^*(f(w))$.

U nas to będzie tak. Z każdym sklepem $S^* \in P^*$ można stowarzyszyć taką restaurację $Ciot(S^*)$, w której za obiad płaci się tyle, ile zapłaciło się w sklepie za produkty. Oczywiste jest, że taką restaurację prowadzi nasza ciocia albo inna bliska krewna. Z samego określenia odwzorowania dualnego wynika, że

$$\mathrm{rec}^* = Ciot.$$

Jakie są ceny w restauracji $Ciot$(MIE)? Oczywiście takie:

zupa — 1 zł, gulasz — 2 zł, befsztyk — 3 zł,

a to znaczy, że ta restauracja jest kombinacją liniową:

$$Ciot(\mathrm{MIE}) = 1\cdot\mathrm{ZU}+2\cdot\mathrm{GU}+3\cdot\mathrm{BE}.$$

Zupełnie podobnie stwierdzamy, że skoro w $Ciot$(ZIE) można zjeść kartoflankę za 7 zł, gulasz za 5 zł, a befsztyk za złotówkę, to

$$Ciot(\mathrm{ZIE}) = 7\ \mathrm{ZU}+5\ \mathrm{GU}+1\ \mathrm{BE}.$$

Dwa ostatnie wzory dają już macierz naszego odwzorowania dualnego $\mathrm{rec}^* = Ciot$. Widzieliśmy już, że występujące w tych wzorach współczynniki liczbowe ustawiamy w kolumnach i stąd mamy, że macierzą $Ciot$ jest

$$\begin{bmatrix}1 & 7\\ 2 & 5\\ 3 & 1\end{bmatrix}$$

zwana transponowaną względem $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 7 & 5 & 1\end{bmatrix}$. Tak oto widzimy, że *macierzą odwzorowania dualnego do f w bazach dualnych rozpatrywanych przestrzeni jest macierz transponowana względem macierzy odwzorowania f w danych bazach.*

(opr. red. na podstawie *The Mathematical Gazette*, 1975).

Rozwiązanie zadania M 238

Jeżeli b_0 jest dowolne, zaś $b_1 = \frac{b_0}{b_0-1}$,

$A_1 = b_0+b_1$, $b_2 = \frac{A_1}{A_1-1}$,

$A_2 = b_0+b_1+b_2$, itd., to każde z wyrażeń $A_n = b_0+b_1+\ldots+b_n$ ma żądaną własność. W naszym przypadku $b_0 = 6$ i obliczamy

$b_4 = \frac{1679616}{1502761}$, $A_4 = \frac{2821109907456}{265770796665}$

i naszym wyrażeniem jest

$$\frac{2821109907456}{265770796655} = 6+\frac{6}{5}+\frac{36}{31}+\frac{1296}{1141}+\frac{1679616}{1502761}.$$