Szczególny, ale ciekawy przypadek

Jak łatwo zauważyć, prostym wnioskiem z twierdzenia Banacha o odwzorowaniach zwężających (p. artykuły J. Geresza, M. E. Kuczmy i L. Górniewicza) jest
Każde podobieństwo nie będące izometrią ma punkt stały.
Czy łatwo? No bo, że podobieństwo ,,zmniejszające'' musi mieć punkt stały to widać, ale ,,zwiększające''? W przypadku ,,zwiększającego'' podobieństwa φ zauważamy, że przekształcenie odwrotne φ^{-1} jest podobieństwem ,,zmniejszającym'' i ma wobec tego punkt stały, powiedzmy A.
I rachujemy

$$\varphi^{-1}(A) = A,$$

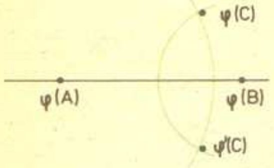
a więc

$$\varphi(\varphi^{-1}(A)) = \varphi(A),$$

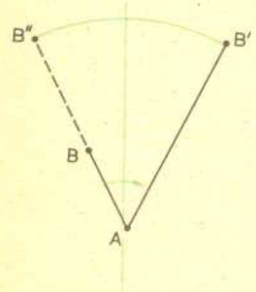
czyli

$$\varphi(A) = A,$$

a o to chodziło.



Wywnioskować stąd można, że na płaszczyźnie każde podobieństwo nie będące izometrią to podobieństwo spiralne (czyli złożenie jednokładności i obrotu o tym samym środku) lub odbicie dylatacyjne (czyli złożenie jednokładności i symetrii osiowej o osi przechodzącej przez środek jednokładności).
Zauważmy najpierw, że jeżeli podobieństwa φ i φ' tak samo przekształcają (różne) punkty A i B, to albo $\varphi = \varphi'$, albo φ' jest złożeniem φ i symetrii względem prostej $\varphi(A)\,\varphi(B)$, co widać z rysunku. A wniosek stąd taki, że podobieństwo, o którym wiemy czy zmienia orientację figur, czy nie, jest jednoznacznie określone przez swoje wartości w dwóch punktach.



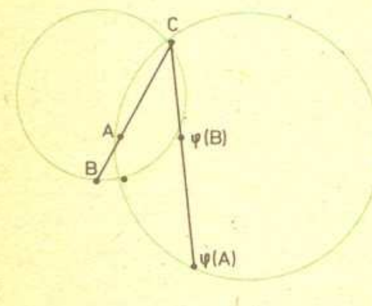
Weźmy pod uwagę podobieństwo nie będące izometrią i jego punkt stały A oraz inny punkt B, który jest przekształcany na B'. Wykonajmy jednokładność o środku A i stosunku

$$\frac{AB'}{AB},$$

która przeprowadzi B na B''. Teraz, jeśli podobieństwo nie zmienia orientacji, wystarczy złożyć tę jednokładność z obrotem względem A o $\sphericalangle B''AB'$ (podobieństwo spiralne), a jeśli zmienia — z symetrią względem dwusiecznej tego kąta (odbicie dylatacyjne).
A teraz **zadanie** dla Czytelników.
Znajdowanie punktu stałego w myśl dowodu Banacha jest nieefektywne — jeśli nie trafimy przypadkiem na punkt stały podobieństwa φ, to jest on granicą ciągu punktów

$$P,\ \varphi(P),\ \varphi\varphi(P),\ \varphi\varphi\varphi(P),\ \ldots,$$

gdzie P jest dowolnym punktem.



Mając dane punkty A, B oraz $\varphi(A)$, $\varphi(B)$, gdzie φ jest podobieństwem spiralnym, możemy znaleźć konstrukcyjnie punkt stały tego podobieństwa następującą metodą:
Niech C będzie punktem przecięcia prostych AB i $\varphi(A)\varphi(B)$. Poprowadźmy okręgi przez A, $\varphi(A)$ i C, oraz przez B, $\varphi(B)$ i C. Ich różny od C punkt przecięcia (lub C — gdy są styczne) to właśnie szukany punkt stały (dlaczego?).
No, a jeśli φ jest odbiciem dylatacyjnym? To właśnie jest zapowiedziane zadanie.

Zadania

Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

M 235. Pewne pola szachownicy zamalowano tak, że król nie może przejść od lewego do prawego jej brzegu po polach zamalowanych. Udowodnić, że po nie zamalowanych polach może od górnego do dolnego brzegu szachownicy przejść wieża.
Rozwiązanie na str. 5

M 236. Z kwadratu $[0,1]\times[0,1]$ zrobiono szachownicę o n^2 polach. Niech F_1, F_2 będą dowolnymi przekształceniami tego kwadratu w odcinek $[0,1]$. Oznaczamy $F(x) = (F_1(x), F_2(x))$. Wykazać, że istnieją cztery punkty p, q, r, s leżące w jednym polu szachownicy i takie, że $F_1(p) \leqslant p_1$, $F_1(q) \geqslant q_1$, $F_2(r) \leqslant r_2$ i $F_2(s) \geqslant s_2$. Wskazówka: patrz **M 235.**
Rozwiązanie na str. 3

M 237. Udowodnić twierdzenie Brouwera: Jeżeli F jest przekształceniem ciągłym domkniętego kwadratu w siebie, to istnieje punkt x taki, że $F(x) = x$. Wskazówka: patrz **M 236.**
Rozwiązanie na str. 1

Redaguje doc. dr Michał ŚWIĘCKI

F 80. Każdy spośród N punktów połączony jest z pozostałymi za pomocą identycznych oporników o oporze R. Znaleźć opór zastępczy takiego układu.
Rozwiązanie na str. 15 (T. Tratkiewicz)