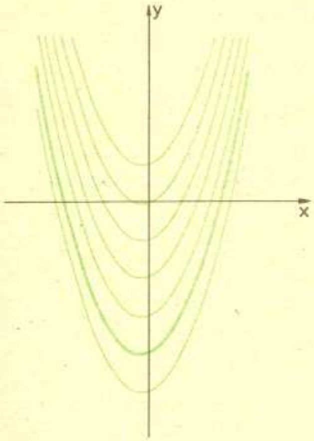
Stefan Banach, punkty stałe i równania różniczkowe

Dr Marcin E. KUCZMA

Przyjrzyjmy się równaniu

$$\varphi'(x) = \frac{3x^2(x^3\varphi(x) - 2\varphi(x) + 2)}{2 + \varphi(x)^2}. \tag{1}$$

To *równanie różniczkowe*. W odróżnieniu od równań znanych z kursu szkolnego, gdzie wielkością poszukiwaną jest liczba, w równaniu (1) niewiadomą jest f u n k c j a φ, której pochodna ma być równa wyrażeniu napisanemu po prawej stronie.
Do równań różniczkowych prowadzą w naturalny sposób przede wszystkim zagadnienia z różnych działów fizyki; z pewnością nasi Czytelnicy potrafią podać na to przykłady (choćby równania ruchu pod działaniem sił). Teoria równań różniczkowych stanowi ważny dział matematyki, tak teoretycznej jak i stosowanej.



W problematyce równań różniczkowych zaznaczają się dość wyraźnie dwa nurty: zagadnienia praktyczne (metody rozwiązywania) i teoretyczne — typowe dla tej drugiej sfery zagadnień są liczne twierdzenia orzekające o istnieniu i jedyności rozwiązań różnych rodzajów równań. Zatrzymajmy się na chwilę nad kwestią jedyności. Już nawet bardzo prosty przykład równania:

$$\varphi'(x) = 2x \tag{2}$$

pokazuje, że rozwiązanie może nie być jedyne; każda funkcja postaci $\varphi(x) = x^2 + c$, gdzie c jest dowolną stałą, jest rozwiązaniem tego równania. Łacno można uwierzyć, że podobna sytuacja ma zazwyczaj miejsce także przy rozważaniu równań o budowie bardziej skomplikowanej niż (2). W przypadku równania (2) jednoznaczność można uzyskać nakładając dodatkowy warunek, aby szukana funkcja przyjmowała w wybranym punkcie zadaną wartość.

Tak więc np. przy warunku $\varphi(2) = 0$ jedynym rozwiązaniem równania (2) jest funkcja $\varphi(x) = x^2 - 4$. Nie inaczej rzecz się ma w przypadku wielu innych równań. Dlatego też, dla uzyskania jednoznaczności, często stawia się zadanie w postaci: dane równanie plus *warunek początkowy*: $\varphi(x_0) = y_0$; x_0, y_0 — dane liczby (nazwa: *warunek początkowy* bierze się z zastosowań w fizyce, gdzie zmienną niezależną interpretuje się często jako czas).
Rozważmy więc równanie (1) stawiając warunek początkowy wedle fantazji; na przykład:

$$\varphi(1) = -1. \tag{3}$$

Czytelnicy oswojeni nieco z rachunkiem całkowym zauważą z łatwością, że zespół *dwóch* postulatów: równania (1) i warunku (3) można równoważnie zapisać w formie *pojedynczego* równania:

$$\varphi(x) = -1 + \int_1^x \frac{3t^2(t^3\varphi(t) - 2\varphi(t) + 2)}{2 + \varphi(t)^2}\, dt, \tag{4}$$

otrzymanego przez scałkowanie stronami równania (1) przy uwzględnieniu warunku (3).

Kto nie jest pewien, niech różniczkuje wzór (4).

I co tu mają do rzeczy punkty stałe? Ano, mają. Przypatrzmy się równaniu (4) w sposób nieco bardziej abstrakcyjny. Otóż: mając daną *jakąkolwiek* funkcję ciągłą φ możemy wykonać na niej działania wskazane po prawej stronie wzoru (4); traktując x jako zmienną, dostajemy w ten sposób pewną nową funkcję — nazwijmy ją ψ. Jaka jest szansa, że $\psi = \varphi$? — czyli że po wykonaniu tych operacji trafimy z powrotem na tę funkcję φ, od której wyszliśmy? Niewielka. No ale to właśnie postuluje nasze równanie. Oznaczmy literą T odwzorowanie, które dowolnie wybranej funkcji φ przyporządkowuje funkcję

$$\psi(x) = -1 + \int_1^x \frac{3t^2(t^3\varphi(t) - 2\varphi(t) + 2)}{2 + \varphi(t)^2}\, dt \tag{5}$$

to znaczy napiszmy

$$\psi = T(\varphi). \tag{6}$$

Widzimy, że rozwiązaniem równania (4) będzie funkcja φ, dla której $T(\varphi) = \varphi$. Zatem rozwiązanie równania (4) — to ni mniej ni więcej, tylko punkt stały odwzorowania T.

W tytule artykułu wymienione jest nazwisko genialnego naszego rodaka Stefana Banacha, jednego z najwybitniejszych matematycznych umysłów wszechczasów. Spośród licznych twierdzeń Banacha postaramy się tu zaprezentować jedno, odgrywające niepoślednią rolę w teorii punktów stałych.

Rozwiązanie zadania M 237

Możemy założyć, że długość boku kwadratu wynosi 1. Przeprowadzając konstrukcję opisaną w zadaniu M 236 dla $n = 2, 4, 8, \ldots, 2^k, \ldots$ przekonamy się, że istnieją ciągi (p_k), (q_k), (r_k), (s_k) takie, że p_k, q_k, r_k, s_k leżą w jednym kwadracie o boku 2^{-k}, oraz $F_1(p_k) \leqslant p_{k,1}$, $F_1(q_k) \geqslant q_{k,1}$, $F_2(r_k) \leqslant r_{k,2}$, $F_2(s_k) \geqslant s_{k,2}$; dolne wskaźniki 1, 2 oznaczają numery współrzędnych.
Z ciągu (p_k) można wybrać podciąg (p_{k_l}) zbieżny do pewnego punktu x kwadratu. Ale do tego samego punktu będą zbieżne ciągi (q_{k_l}), (r_{k_l}) i (s_{k_l}).
Ponieważ teraz F_1 i F_2 są funkcjami ciągłymi, więc $F_1(x) = \lim_{l\to\infty} F_1(p_{k_l}) \leqslant \lim_{l\to\infty} p_{k_l,1} = x_1$ i analogicznie $F_1(x) \geqslant x_1$, $F_2(x) \leqslant x_2$ oraz $F_2(x) \geqslant x_2$, skąd wynika, że $F_1(x) = x_1$ i $F_2(x) = x_2$, czyli $F(x) = x$, c.b.d.o.

Czytelnikom znane jest pojęcie przestrzeni metrycznej zupełnej, tj. takiej, w której zbieżność ciągu punktów (p_n) równoważna jest spełnieniu warunku Cauchy'ego:

odległość $\varrho(p_n, p_m)$ staje się dowolnie mała,
gdy tylko n i m są dostatecznie duże.

Oto rzeczone **twierdzenie Banacha**, zwane *zasadą odwzorowań zwężających*:

Zakładamy, że X jest przestrzenią metryczną zupełną oraz że w przestrzeni X określone jest odwzorowanie T (przyporządkowujące każdemu punktowi $p \in X$ pewien punkt $T(p) \in X$), przy czym istnieje stała $\lambda < 1$ taka, że

$$\varrho(T(p), T(q)) \leqslant \lambda\varrho(p, q) \tag{7}$$

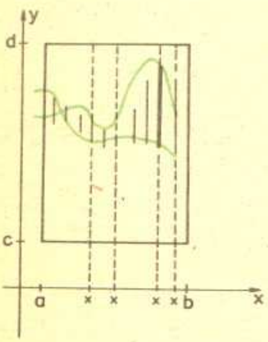
dla każdej pary punktów $p, q \in X$ (odwzorowanie o tej własności nazywamy zwężającym). Wówczas istnieje dokładnie jeden punkt stały tego odwzorowania, czyli jeden punkt spełniający równanie $T(p) = p$.

Przypomnimy (p. artykuł L. Górniewicza), że dowodzi się tego tak. Bierzemy dowolny punkt $p_0 \in X$ i określamy ciąg: $p_1 = T(p_0)$, $p_2 = T(p_1)$, $p_3 = T(p_2)$, ... Okazuje się, że ciąg ten jest zbieżny i to — niezależnie od wyboru początkowego punktu p_0 — do tej samej granicy p. W jakikolwiek sposób wybierzemy p_0, w granicy dojdziemy do tego samego punktu p, będącego już punktem stałym odwzorowania T.

To się nazywa: geometryzacja analizy.

Najbardziej chyba naturalny przykład przestrzeni metrycznej to znana nam dobrze przestrzeń euklidesowa. Prowadząc rozważania dotyczące ogólnych („abstrakcyjnych") przestrzeni metrycznych z reguły odwołujemy się więc do wyobraźni geometrycznej, która każe nam widzieć punkty rozwazanej przestrzeni jak kropki na papierze. Siła ogólnej teorii polega między innymi na tym, że — niezależnie od owych intuicji geometrycznych (bardzo zresztą przydatnych) — uzyskane wyniki można też stosować do przestrzeni, której elementami są obiekty zupełnie innego rodzaju. Na przykład *funkcje*.

Przypuśćmy, że mamy dane dwa przedziały liczbowe $\langle a, b\rangle$ i $\langle c, d\rangle$. Niech $\mathscr{P} = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$ oznacza prostokąt na płaszczyźnie Oxy o wierzchołkach (a, c), (b, c), (b, d), (a, d). Rozważmy zbiór X wszystkich funkcji ciągłych na przedziale $\langle a, b\rangle$ o wartościach w przedziale $\langle c, d\rangle$ — czyli zbiór wszystkich funkcji ciągłych, których wykresy zawierają się w prostokącie $\mathscr{P}$. Zbiór ten staje się przestrzenią metryczną, jeśli odległość pomiędzy dwiema funkcjami f i g określić następująco:



$$\varrho(f, g) = \max_{x \in \langle a, b\rangle} |f(x) - g(x)|. \tag{8}$$

Geometrycznie, znaczy to tyle, że dla każdej liczby $x \in \langle a, b\rangle$ bierzemy długość odcinka linii pionowej przechodzącej przez punkt $(x, 0)$, wyznaczonego przez punkty przecięcia tej linii z wykresami funkcji f i g; następnie ze wszystkich otrzymanych długości wybieramy największą. To, że odległość określona w ten sposób czyni zadość aksjomatom przestrzeni metrycznej, jest kwestią całkiem trywialnego sprawdzenia. To, że otrzymana przestrzeń metryczna jest zupełna, jest mniej trywialne, ale też i nie za bardzo trudne. Dowód można znaleźć w każdym podręczniku analizy matematycznej, a nawet w niektórych podręcznikach szkolnych (w skryptach dla szkół z rozszerzonym programem matematyki).

Jeśli (f_n) jest ciągiem funkcji w przestrzeni X spełniającym warunek Cauchy'ego, to przy dowolnie ustalonym $x \in X$ ciąg liczb $\{f_n(x)\}$ spełnia warunek Cauchy'ego, jest więc zbieżny do pewnej granicy $f(x)$. W ten sposób zostaje określona pewna funkcja f. Sprawdzenia wymaga tylko, że $f \in X$ (ciągłość!) i że odległość f_n od f dąży do zera, gdy $n \to \infty$.

Jak nietrudno się domyślić, zmierzamy do tego, żeby zastosować zasadę Banacha do odwzorowania T określonego wzorem (5)–(6). Postawmy zagadnienie ogólniej. Zamiast bardzo konkretnego równania (1) (sam jego wygląd budzi niechęć!) rozważmy równanie w postaci ogólnej

$$\varphi'(x) = F(x, \varphi(x)) \tag{9}$$

z warunkiem początkowym

$$\varphi(x_0) = y_0. \tag{10}$$

Pochodną cząstkową $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ funkcji dwu zmiennych $F(x, y)$ oblicza się traktując F jako funkcję samej tylko zmiennej y i różniczkując; zmienną x traktuje się jako stałą („parametr").

Zakładamy tu, że funkcja $F(x, y)$ jest ciągła i ma ciągłą pochodną cząstkową $\dfrac{\partial F}{\partial y}$. W naszym przykładzie (1) funkcja $F(x, y)$ ma postać

$$F(x, y) = \frac{3x^2(x^3y - 2y + 2)}{2 + y^2}.$$

Podobnie jak poprzednio, równanie (9) z warunkiem (10) jest równoważne postulatowi, aby funkcja φ była punktem stałym odwzorowania T danego wzorem:

$$\begin{cases} T(\varphi) = \psi, \quad \text{gdzie} \\ \psi(x) = y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} F(t, \varphi(t))\,dt. \end{cases} \tag{11}$$

Rozwiązanie zadania M 236

Zamalujmy na czerwono te pola, dla których $F_1(x) < x_1$ dla wszystkich x leżących we wnętrzu lub na brzegu pola, a na zielono pola, dla których $F_1(x) > x_1$ dla wszystkich punktów pola domkniętego. Ponieważ na lewym brzegu nie mogą leżeć pola czerwone, na prawym — pola zielone i dwa pola różnych kolorów nie mogą się dotykać, król nie może przejść od lewego brzegu szachownicy do prawego nie wchodząc na pole nie zamalowane. Wobec tego (p. zad. M 235) wieża może przejść od górnego brzegu do dolnego po nie zamalowanych polach. Zamalujmy teraz na niebiesko te pola na jej drodze, których wszystkie punkty spełniają warunek $F_2(x) > x_2$ i na żółto — te pola, że wszystkie ich punkty są przesuwane „w dół": $F_2(x) < x_2$. Rozumując analogicznie, jak to pokazaliśmy powyżej, przekonamy się, że co najmniej jedno pole na drodze wieży i teraz pozostanie nie zamalowane. Znaczy to, że istnieją w tym polu punkty p, q, r, s spełniające warunki zadania.

→ pola zielone

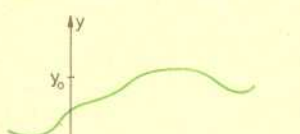
← pola czerwone

droga wieży

↓ pola żółte

↑ pola niebieskie

pole znalezione



W analizie matematycznej wprowadza się różne rodzaje zbieżności ciągów funkcyjnych. Jeżeli ciąg funkcji jest zbieżny jako ciąg elementów przestrzeni metrycznej z odległością daną wzorem (8), to mówimy, że ten ciąg jest zbieżny *jednostajnie*. Jeśli Czytelnik zna „epsilonowo-deltową" definicję jednostajnej zbieżności ciągu funkcji:

f_n zbiega jednostajnie do f na przedziale (a, b)

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{N} \bigwedge_{n>N} \bigwedge_{x\in\langle a, b\rangle} |f_n(x)-f(x)| < \varepsilon,$$

to może przekonać się, że te dwa określenia pokrywają się.

Ustalmy dwie liczby dodatnie r i R i rozważmy prostokąt $\mathcal{P} = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$, gdzie

$$\langle a, b\rangle = \langle x_0-r, x_0+r\rangle, \quad \langle c, d\rangle = \langle y_0-R, y_0+R\rangle.$$

Niech M oznacza największą (co do modułu) wartość funkcji F na zbiorze $\mathcal{P}$, a M' — największą wartość pochodnej $\dfrac{\partial F}{\partial y}$:

$$M = \max_{(x,y)\in\mathcal{P}} |F(x, y)|, \quad M' = \max_{(x,y)\in\mathcal{P}} \left|\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)\right|.$$

Rozpatrujemy przestrzeń metryczną X złożoną z funkcji ciągłych o wykresach zawartych w $\mathcal{P}$, z odległością zdefiniowaną przed chwilą (wzór (8)). Chcemy, żeby wzór (11) określał odwzorowanie T przestrzeni X w siebie (to znaczy, żeby dla każdej funkcji $\varphi \in X$, funkcja ψ dana wzorem (11) też miała wykres zawarty w $\mathcal{P}$). Prościutki rachunek pokazuje, że w tym celu wystarczy, aby spełniona była nierówność

$$rM \leqslant R. \tag{12}$$

Niech $\varphi_1, \varphi_2 \in X$. Oznaczmy odległość $\varrho(\varphi_1, \varphi_2)$ literą δ. Wówczas

$$|F(t, \varphi_1(t))-F(t, \varphi_2(t))| = |\varphi_1(t)-\varphi_2(t)| \cdot \left|\text{wartość } \frac{\partial F}{\partial y} \text{ w pewnym punkcie}\right| \leqslant \delta M'.$$

Biorąc dowolny punkt $x \in \langle a, b\rangle$ (a więc taki, że $|x-x_0| \leqslant r$) i całkując od x_0 do x dostajemy

$$\left|\int_{x_0}^{x} \big(F(t, \varphi_1(t))-F(t, \varphi_2(t))\big)dt\right| \leqslant r\delta M'.$$

Niech teraz $\psi_1 = T(\varphi_1), \psi_2 = T(\varphi_2)$; utwórzmy różnicę $\psi_1(x)-\psi_2(x)$. Przy odejmowaniu składnik y_0 (por. wzór (11)) ulegnie redukcji i otrzymujemy $|\psi_1(x)-\psi_2(x)| \leqslant r\delta M'$, skąd ostatecznie (przez wzięcie wartości maksymalnej dla lewej strony)

$$\varrho(\psi_1, \psi_2) \leqslant rM'\delta = rM'\varrho(\varphi_1, \varphi_2).$$

Na to, by odwzorowanie T było zwężające, wystarczy, aby

$$rM' < 1. \tag{13}$$

Liczby r i R spełniające warunki (12) i (13) na pewno można znaleźć. Na mocy twierdzenia Banacha odwzorowanie T ma w przestrzeni X dokładnie jeden punkt stały — znaczy to, że równanie (9) z warunkiem początkowym (10) ma w przedziale $\langle x_0-r, x_0+r\rangle$ dokładnie jedno rozwiązanie.

Powtarzając to rozumowanie, biorąc punkt x_0+r (względnie x_0-r) jako „nowy punkt x" możemy to rozwiązanie przedłużać w prawo i w lewo. Czyniąc to (w razie potrzeby) wielokrotnie, otrzymamy rozwiązanie w całym przedziale jego określoności.

W ten sposób z zasady odwzorowań zwężających wyprowadziliśmy twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania pewnego równania różniczkowego. Powie ktoś: pięknie, ale wartość tego jest czysto teoretyczna; nie zbliżyliśmy się nawet do tego, aby to rozwiązanie wyznaczyć. Wiemy, że istnieje, ale nie wiemy, czemu jest równe.

To nie całkiem prawda. Przypomnijmy sobie dowód Banacha: punkt stały p otrzymywało się jako granicę ciągu (p_n) określonego indukcyjnie: $p_{n+1} = T(p_n)$; przy tym p_0 mogło być dowolne. Tak więc w przypadku odwzorowania (11) funkcję będącą jego punktem stałym dostaniemy jako granicę ciągu funkcji danego indukcyjnie:

$$\varphi_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, \varphi_n(t))dt.$$

Zacząć możemy od dowolnej funkcji φ_0; dla wygody rachunków można wziąć np. $\varphi_0 \equiv 0$. Funkcje otrzymywane w kolejnych krokach stanowią coraz dokładniejsze przybliżenia szukanej funkcji φ; całe to postępowanie nosi nazwę metody kolejnych przybliżeń. W pobliżu punktu x_0 zbieżność jest bardzo szybka.

Wróćmy do równania (1) z warunkiem (3), czyli do wzorów (5)—(6). Biorąc $\varphi_0 \equiv 0$ i obliczając $\varphi_1 = T(\varphi_0)$ znajdujemy

$$\varphi_1(x) = -1 + \int_1^x \frac{3t^2 \cdot 2}{2} dt = x^3-2.$$

Jest to pierwsze przybliżenie rozwiązania równania (1). Proponujemy Czytelnikom znalezienie drugiego przybliżenia. A może ktoś znajdzie dokładne rozwiązanie?