Zamieszczony obok artykuł (i wszystkie inne artykuły matematyczne tego numeru Delty) jest poświęcony teorii punktów stałych przekształceń ciągłych. Jest to trzeci artykuł z cyklu, prezentującego najbardziej znane zagadnienia, które ugruntowały sławę polskiej szkoły matematycznej w topologii. Pierwszy artykuł poświęcony był teorii retraktów (Delta 3/1979), drugi — teorii kształtu (5/1980). Faktycznym twórcą tych dwu teorii jest profesor Karol Borsuk, który również miał decydujący udział w rozwoju teorii punktów stałych odwzorowań ciągłych.

O punktach stałych

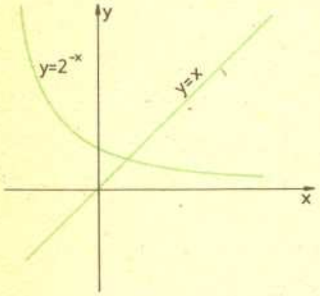
Doc. dr Lech GÓRNIEWICZ

Rozwiązywanie równań stanowi ważną część szkolnego programu matematyki. Równania, które rozwiązujemy w szkole, można by scharakteryzować następująco:

a) dana jest funkcja $f: A \to R$, gdzie A jest pewnym podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych R,
b) znajdujemy te wszystkie liczby $x \in A$, dla których $f(x) = 0$.

Jeżeli dane jest równanie $f(x) = 0$, to interesują nas dwa pytania, a mianowicie:

1) czy istnieje rozwiązanie tego równania (w tym momencie nie interesujemy się sprawą, co jest rozwiązaniem)?
2) w przypadku pozytywnej odpowiedzi na pytanie 1) zastanawiamy się, jak wyznaczyć rozwiązania.



W wielu przypadkach dysponujemy tylko odpowiedzią na pytanie 1). Weźmy na przykład równanie $\left(\frac{1}{2}\right)^x - x = 0$. Jeżeli sporządzimy wykresy funkcji $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ i $g(x) = x$, to widocznym jest, że wykresy te mają dokładnie jeden punkt wspólny. To znaczy, że nasze równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie. Widocznym jest również, że rozwiązanie to jest liczbą z przedziału $(0, 1)$, natomiast nie potrafimy prosto wyznaczyć tej liczby.

Pojęcie punktu stałego, którym będziemy zajmować się w tym artykule, jest ściśle związane z pojęciem rozwiązania równania. Zacznijmy od prostej uwagi. Niech A będzie podzbiorem trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej R^3 i niech $f: A \to R^3$ będzie pewnym odwzorowaniem. Nic nie stoi na przeszkodzie, aby zapytać, dla jakich $x \in A$ mamy $f(x) = \mathit{0}$, gdzie $\mathit{0} = (0, 0, 0)$ jest punktem o zerowych współrzędnych w R^3. Widzimy więc, że „szkolne" pojęcie równania ma sens nie tylko w przypadku funkcji o dziedzinie i przeciwdziedzinie rzeczywistej. Postawmy tę sprawę w trochę zmienionej postaci. Rozpatrzmy funkcję (cały czas słowa funkcja i odwzorowanie traktujemy jako synonimy) $f: X \to X$, gdzie X jest dowolnym zbiorem. Pytamy, czy istnieje $x \in X$ takie, że $f(x) = x$. Element $x \in X$ taki, że $f(x) = x$ nazywamy *punktem stałym* odwzorowania f. Jeżeli weźmiemy $X = A \subset R^3$, to pytanie o istnienie punktu stałego odwzorowania $f: X \to X$ jest równoważne pytaniu o istnienie rozwiązania równania $g(x) = 0$, gdzie $g: X \to R^3$ jest dane wzorem: $g(x) = f(x) - x$. W ogólnej sytuacji pytanie o istnienie punktu stałego odwzorowania $f: X \to X$ jest po prostu pytaniem o istnienie rozwiązania równania $f(x) = x$ (takie równanie ma sens na dowolnym zbiorze!).

Mam nadzieję, że te wstępne uwagi umotywowały Czytelnikom potrzebę zajmowania się punktami stałymi. Przejdziemy obecnie do spraw zasadniczych w tym artykule. Na początek odnotujmy, że w odniesieniu do punktów stałych można sformułować pytania analogiczne do 1) i 2) powyżej. Pierwsza część naszej dyskusji o punktach stałych będzie dotyczyła pytania 1). Dla ustalenia uwagi umawiamy się, że przez X stale oznaczać będziemy pewien podzbiór R^3 oraz że przez odwzorowanie $f: X \to X$ będziemy rozumieć odwzorowanie ciągłe. Wyjaśnimy, w krótkiej formie, jak rozumieć w tym przypadku ciągłość odwzorowania.

Pojęcie ciągłości odwzorowań omówione jest dokładnie np. w książce A. Lelka *Zbiory*, PZWS 1966. W Delcie o podobnych sprawach pisała M. Moszyńska (1/1975 i 5/1975).

Niech $x = (x_1, x_2, x_3)$ i $y = (y_1, y_2, y_3)$ będą dwoma punktami w R^3. Przypomnimy, że odległość tych punktów wyraża wzór:

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}.$$

Ponieważ wskaźniki na dole (x_n) oznaczają często współrzędne punktów, autor stawia wskaźniki wyrazów ciągu na górze. Ten symbol nie ma tu nic wspólnego z potęgowaniem.

Mówimy, że ciąg punktów $\{x^n\} \subset X$ jest zbieżny do punktu $x \in X$ wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg liczb rzeczywistych $\{d(x^n, x)\}$ jest zbieżny do liczby zero. Odwzorowanie $f: X \to X$ nazywamy ciągłym, jeżeli dla każdego ciągu $\{x^n\} \subset X$ zbieżnego do punktu $x \in X$ ciąg wartości $\{f(x^n)\}$ jest zbieżny do punktu $f(x)$.

Będziemy mówić, że zbiór X ma własność punktu stałego, jeżeli każde (ciągłe) odwzorowanie $f: X \to X$ ma punkt stały. Podanie warunków wystarczających na to, aby dany zbiór miał własność punktu stałego, dawałoby w pełni zadowalającą odpowiedź na interesujące nas pytanie 1), postawione w odniesieniu do punktów stałych. Nietrudno podać proste przykłady zarówno na „tak" jak i na „nie". Jeżeli na przykład $X = \{x_0\}$ jest zbiorem jednopunktowym, to oczywiście ma własność punktu stałego, ale już zbiór dwupunktowy $X = \{x_0, x_1\}$ własności tej nie ma (dlaczego?). Zbiór $X = R^3$ również nie ma własności punktu stałego, gdyż na przykład odwzorowanie $f: R^3 \to R^3$ dane wzorem: $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 1, x_2 + 1, x_3 + 1)$ nie ma punktów stałych. Pewną odpowiedź na pytanie, jakie zbiory mają własność punktu stałego, daje twierdzenie Brouwera.

Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881—1966) — matematyk holenderski, znany głównie ze swoich prac z zakresu topologii i logiki. Cytowane obok twierdzenie o punkcie stałym pochodzi z 1910 roku.

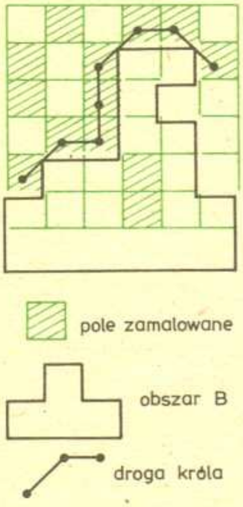
K^3 oznacza tu domkniętą kulę jednostkową w R^3, tj.

$$K^3 = \{x \in R^3 : d(x, 0) \leqslant 1\}.$$

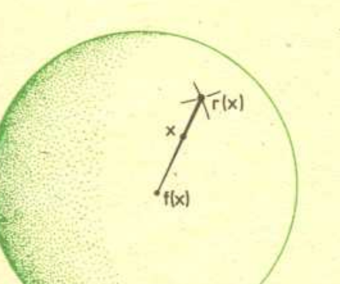
Twierdzenie Brouwera. *Kula K^3 ma własność punktu stałego.*

Rozwiązanie zadania M 235

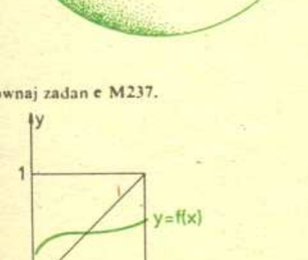
Powiększmy szachownicę, dodając przy jej dolnym brzegu jeden rząd pól nie zamalowanych, i rozpatrzmy obszar A złożony ze wszystkich pól, do których może dotrzeć wieża wychodząc z dodanego rzędu i nie przechodząc przez pola zamalowane. Teza naszego zadania jest równoważna temu, że A zawiera pewne pole przy górnym brzegu szachownicy. Przypuśćmy, że tak nie jest. Dołączając do A wszystkie pola leżące całkowicie wewnątrz niego, otrzymamy nowy obszar B, również nie zawierający pól przy górnym brzegu szachownicy, którego brzegiem jest zamknięta łamana. Niech teraz a i b będą punktami tej łamanej leżącymi odpowiednio na lewym i prawym boku szachownicy i najbliższymi górnemu jej brzegowi (gdyby na bocznych krawędziach szachownicy takich pól nie było, wieża mogłaby przejść z dołu do góry). Łamana ta zawiera drogę łączącą a i b, przebiegającą powyżej dolnego brzegu szachownicy i rozdzielającą pola zamalowane od nie zamalowanych. Król może przejść od lewego do prawego brzegu szachownicy po zamalowanych polach przyległych do tej drogi — wbrew założeniu.



$$S^2 = \{x \in K^3 : d(x, 0) = 1\} = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$



Porównaj zadanie M237.



Do sprawy dowodu, jak również komentarza uzupełniającego powyższe twierdzenie wrócimy później. Obecnie omówimy niektóre konsekwencje twierdzenia Brouwera. Poznamy inne zbiory mające własność punktu stałego.

Przypuśćmy, że dany jest zbiór X oraz dwa odwzorowania (ciągłe) $g: X \to K^3$ i $h: K^3 \to X$ takie, że $(h \circ g)(x) = x$ dla każdego $x \in X$ oraz $(g \circ h)(x) = x$ dla każdego $x \in K^3$. Wtedy mówimy, że zbiór X jest homeomorficzny z K^3. Na przykład kula domknięta K_1^3 o środku w punkcie (1,1,1) i promieniu 1 jest homeomorficzna z K^3; odpowiednie odwzorowania $g: K_1^3 \to K^3$ i $h: K^3 \to K_1^3$ dane są wzorami: $g(x_1, x_2, x_3) = (x_1-1, x_2-1, x_3-1)$, $h(x_1, x_2, x_3) = (x_1+1, x_2+1, x_3+1)$.

Proponujemy Czytelnikowi zastanowić się, jak wykazać, że każda kula domknięta (o dowolnym środku i dowolnym promieniu), każdy prostopadłościan, każdy ostrosłup jest homeomorficzny z K^3. Dysponujemy więc całkiem bogatą klasą zbiorów homeomorficznych z K^3. Prawdziwy jest następujący wniosek z twierdzenia Brouwera:

Każdy zbiór homeomorficzny z K^3 ma własność punktu stałego.

Istotnie, rozpatrzmy odwzorowanie $f: X \to X$. Wykażemy, że f ma punkt stały. Oznaczmy przez $g: X \to K^3$ i $h: K^3 \to X$ odwzorowania ustalające homeomorfizm. Wtedy złożenie $g \circ f \circ h$ jest odwzorowaniem K^3 w K^3 i na mocy twierdzenia Brouwera istnieje punkt $x \in K^3$ taki, że $(g \circ f \circ h)(x) = x$. Z ostatniej równości wynika, że $(h \circ g \circ f)(h(x)) = h(x)$ i ponieważ $(h \circ g \circ f \circ h)(x) = (f \circ h)(x)$ otrzymujemy, że $f(h(x)) = h(x)$. Pokazaliśmy więc, że odwzorowanie f ma punkt stały $h(x)$.

Do wypowiedzenia innej konsekwencji z twierdzenia Brouwera potrzebujemy pojęcia retraktu. Przypuśćmy, że $A \subset X \subset R^3$. Zbiór A nazywać będziemy retraktem zbioru X wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje (ciągłe) odwzorowanie $r: X \to A$ takie, że $r(x) = x$ dla każdego $x \in A$. Niech A będzie średnicą leżącą na osi x_1 kuli K^3. Wtedy A jest retraktem K^3, gdyż funkcja $r: K^3 \to A$ dana wzorem $r(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 0, 0)$ spełnia wymagane żądania. Można podać wiele przykładów retraktów. Proponujemy Czytelnikowi zastanowienie się nad tą sprawą. Sądzimy, że na podstawie powyższego przykładu Czytelnik potrafi powiedzieć, dlaczego każda średnica K^3 jest retraktem K^3, a także dlaczego przekrój K^3 dowolną płaszczyzną jest retraktem K^3. Jako przykłady retraktów prostopadłościanów i ostrosłupów mogą służyć krawędzie i ściany boczne. Dla jasności dodajmy, że retrakty nie muszą mieć tak „regularnych kształtów" jak w powyższych przykładach. Na przykład łuk leżący w prostopadłościanie łączący dwa punkty na przeciwległych ścianach jest retraktem tego prostopadłościanu.

Przykładów zbiorów mających własność punktu stałego dostarcza nam następujący wniosek z twierdzenia Brouwera:

Retrakt zbioru posiadającego własność punktu stałego ma również własność punktu stałego.

Przypuśćmy, że X ma własność punktu stałego i A jest retraktem X. Dysponujemy dwiema funkcjami: $r: X \to A$, $r(x) = x$ dla każdego $x \in A$, oraz $i: A \to X$, $i(x) = x$. Tak więc mamy $(r \circ i)(x) = x$ dla każdego $x \in A$. Proponujemy Czytelnikowi przeprowadzić dowód tego wniosku stosując metodę analogiczną jak w dowodzie wniosku pierwszego (informacja $(r \circ i)(x) = x$ w pełni wystarcza!).

Okazuje się, że związek pomiędzy twierdzeniem Brouwera i pojęciem retraktu jest głębszy. Oznaczmy przez S^2 sferę jednostkową (tj. powierzchnię kuli K^3).

Twierdzenie Brouwera jest równoważne temu, że S^2 nie jest retraktem K^3.

Dowiedziemy tego metodą niewprost. Przypuśćmy, że istnieje odwzorowanie $r: K^3 \to S^2$ takie, że $r(x) = x$ dla każdego $x \in S^2$. Wtedy odwzorowanie $f: K^3 \to K^3$ dane wzorem: $f(x) = -r(x)$ nie ma punktu stałego. Na odwrót, jeżeli przypuścimy, że istnieje odwzorowanie $f: K^3 \to K^3$ bez punktów stałych, to można określić funkcję (ciągłą) $r: K^3 \to S^2$ taką, że $r(x) = x$ dla każdego $x \in S^2$ (patrz rysunek).

Twierdzenie Brouwera sformułowaliśmy, dla prostoty, dla kuli $K^3 \subset R^3$. W gruncie rzeczy jest ono prawdziwe dla dowolnej kuli domkniętej K^n w przestrzeni euklidesowej n-wymiarowej R^n i co więcej, przedstawione wyżej wnioski z twierdzenia Brouwera pozostają prawdziwe dla podzbiorów R^n. Wiemy już, że kula domknięta K^2 na płaszczyźnie R^2 jest retraktem K^3, dalej, dowolny odcinek $[a, b]$ jest retraktem pewnej kuli domkniętej w R^3 (zawsze możemy znaleźć taką kulę, aby odcinek $[a, b]$ był jej średnicą). Nie jesteśmy w stanie dać nawet szkicu dowodu twierdzenia Brouwera dla K^2 lub K^3, gdyż wymaga on znajomości wielu dodatkowych faktów. Natomiast w przypadku odcinka $[a, b]$ dowód jest elementarny. Naszkicujemy go dla odcinka $[0, 1]$. Niech $f: [0, 1] \to [0, 1]$ będzie funkcją ciągłą. Wykres tej funkcji leży w kwadracie $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Funkcja f ma punkt stały wtedy i tylko wtedy, gdy jej wykres ma punkt wspólny z przekątną kwadratu. Przypuśćmy, że wykres f nie przecina przekątnej kwadratu. Z tego, że funkcja ciągła na odcinku musi przyjmować wszystkie wartości pośrednie pomiędzy danymi wynika, że wykres f leży całkowicie nad przekątną lub leży całkowicie pod przekątną kwadratu. Jeżeli wykres f leżałby całkowicie nad przekątną, to funkcja f nie mogłaby być określona w punkcie $x = 1$

Jeżeli natomiast wykres f leży całkowicie pod przekątną, to funkcja f nie byłaby określona w punkcie $x = 0$. Za każdym razem otrzymujemy sprzeczność z tym, że f jest określona na $[0, 1]$.

Ostatnią część tego artykułu poświęcimy sprawie istnienia i metodzie wyznaczania punktów stałych. Zbiór $X \subset R^3$ nazywamy domkniętym w R^3, jeżeli dla każdego ciągu punktów $\{x^n\} \subset X$ z tego, że ciąg $\{x_n\}$ jest zbieżny do punktu $x \in R^3$, wynika, iż $x \in X$.

Odwzorowanie $f: X \to X$ nazywamy *zwężającym* wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje λ, $0 \leqslant \lambda < 1$ takie, że dla dowolnych $x, y \in X$ spełniona jest nierówność:

$$d(f(x), f(y)) \leqslant \lambda \cdot d(x, y).$$

Pozostawiamy Czytelnikowi podanie przykładów odwzorowań zwężających.

Twierdzenie Banacha. *Jeżeli C jest domkniętym podzbiorem R^3, to każde odwzorowanie zwężające $f: X \to X$ ma dokładnie jeden punkt stały.*

Dowód. Niech x^1 będzie dowolnym punktem X. Określamy: $x^2 = f(x^1), \ldots, x^n = f(x^{n-1}), \ldots$. Z określenia i założenia o zwężeniu mamy: $d(x^{n+1}, x^n) = d(f(x^n), f(x^{n-1})) \leqslant \lambda \cdot d(x^n, x^{n-1})$, co znaczy, że przy wzroście n odległość pomiędzy x^{n+1} i x^n maleje. Uwaga ta pozwala pokazać (patrz margines), że ciąg x^n jest zbieżny do pewnego punktu x, a ponieważ X jest domkniętym podzbiorem R^3, to $x \in X$. Z tego, że f jest odwzorowaniem ciągłym (wynika to natychmiast z tego, że jest odwzorowaniem zwężającym!), ciąg $\{f(x^n)\}$ jest zbieżny do $f(x)$. Z drugiej strony ciągi $\{f(x^n)\}$ i $\{x^n\}$ różnią się tylko o jeden wyraz, skąd $f(x) = x$. Twierdzimy, że x jest jedynym punktem stałym odwzorowania f. Istotnie, jeżeli $x' \neq x$ jest również punktem stałym f, to na mocy założenia mamy: $d(f(x'), f(x)) \leqslant \lambda \cdot d(x', x)$ i wobec równości $f(x') = x'$, $f(x) = x$ otrzymujemy $d(x', x) \leqslant \lambda \cdot d(x', x)$, ale ostatnia nierówność jest niemożliwa, bo $0 \leqslant \lambda < 1$ i $x \neq x'$.

Wprost z określenia odwzorowania zwężającego mamy

$$d(x^m, x^n) \leqslant \lambda^m d(x^0, x^{n-m}).$$

Z kolei dla odległości $d(x^0, x^k)$ mamy oszacowanie

$$d(x^0, x^k) \leqslant \frac{1-\lambda^k}{1-\lambda} d(x^0, x^1),$$

łatwe do udowodnienia np. przez indukcję. Przyjmując $k = n-m$ i pomijając składnik $-\lambda^k$ w liczniku ostatniego ułamka dostajemy (dla $n \geqslant m$)

$$d(x^n, x^m) \leqslant \frac{\lambda^m}{1-\lambda} d(x^0, x^1).$$

Ponieważ $\lambda < 1$, więc prawa strona staje się dowolnie mała, gdy m (a więc i n) jest dostatecznie duże. Zatem ciąg $\{x^n\}$ spełnia warunek Cauchy'ego i wobec założonej zupełności przestrzeni X jest ciągiem zbieżnym do pewnego punktu $x \in X$.

Powyższy dowód twierdzenia Banacha podaje metodę wyznaczania punktu stałego. W tym celu wystarczy wystartować od dowolnego punktu $x^1 \in X$, rozpatrzyć tak zwany ciąg iteracji tego punktu, tj. ciąg $\{x^n\}$, gdzie $x^n = f(x^{n-1})$. Granica ciągu iteracji jest (jedynym) punktem stałym odwzorowania f. Godnym odnotowania jest fakt, że ciąg iteracji ma zawsze tę samą granicę niezależną od x^1. Twierdzenie Banacha sformułowaliśmy tylko w przypadku domkniętych podzbiorów R^3, w istocie jest ono prawdziwe dla podzbiorów domkniętych dowolnej przestrzeni euklidesowej R^n, co więcej, istnieje klasa przestrzeni metrycznych zwanych zupełnymi, dla których twierdzenie to pozostaje w mocy.

Ma to znaczenie przy rozwiązywaniu równań różniczkowych (p. artykuł M. Kuczmy).

Przestrzenie zupełne — to takie przestrzenie metryczne, w których spełnienie warunku Cauchy'ego przez ciąg implikuje zbieżność tego ciągu. Przestrzeń euklidesowa i wszystkie jej domknięte podzbiory są zupełne.

Odnotujmy, że złożenie odwzorowania zwężającego z retrakcją lub homeomorfizmem nie musi być odwzorowaniem zwężającym (podajcie przykłady!). Oznacza to, że metodą stosowaną w przypadku twierdzenia Brouwera nie można wyprowadzić wniosków z twierdzenia Banacha.

Obecnie wyjaśnimy, czy twierdzenie Banacha pozostaje prawdziwe dla retraktów i zbiorów homeomorficznych z podzbiorami domkniętymi przestrzeni euklidesowej. Zauważmy na początek, że jeżeli A jest retraktem X, to A jest domkniętym podzbiorem X. Istotnie, jeżeli $\{x^n\} \subset A$ i $\lim x^n = x$, to $\lim r(x^n) = r(x)$, ale $r(x^n) = x^n$, bo $x^n \in A$. Zatem ciągi $\{x^n\}$ i $\{r(x^n)\}$ są identyczne i w konsekwencji $r(x) = x$. Wobec tego $x \in A$, co dowodzi, że A jest domkniętym podzbiorem X. Wobec tego twierdzenie Banacha pozostaje prawdziwe dla retraktów podzbiorów domkniętych w przestrzeniach euklidesowych (bo są one również podzbiorami domkniętymi przestrzeni euklidesowych). Jednakże wypowiedzenie tego wniosku nie dostarcza nam ani jednego nowego przykładu zbioru, dla którego prawdziwe jest to twierdzenie.

A co się dzieje w przypadku zbiorów homeomorficznych z podzbiorami domkniętymi w przestrzeniach euklidesowych? Twierdzenie Banacha jest oczywiście prawdziwe dla zbioru liczb rzeczywistych R (jedno z możliwych uzasadnień otrzymujemy po zauważeniu, że R jest retraktem R^3!). Odcinek $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ jest homeomorficzny z R $\left(\text{odpowiedni homeomorfizm ustala funkcja tg}: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to R \text{ i funkcja odwrotna do tg}\right)$. Jednakże dla odcinka $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ twierdzenie Banacha jest nieprawdziwe. Aby się o tym przekonać, rozpatrzmy funkcję $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. Widzimy, że f jest odwzorowaniem zwężającym $\left(\lambda = \frac{1}{2}\right)$ i nie ma punktów stałych, gdyż $f(x) = x$ zachodzi tylko dla $x = -\frac{\pi}{2}$, ale $-\frac{\pi}{2} \notin \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.