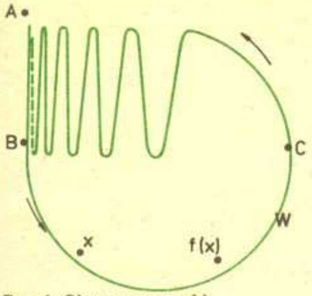
Jak pies goni zająca po Warszawie, czyli jeszcze o punktach stałych

Okrąg na płaszczyźnie nie ma własności punktu stałego (dla odwzorowań ciągłych).



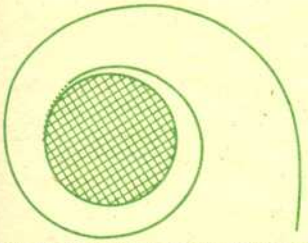
Rys. 1. Okrąg warszawski.

Antypodyzm, czyli przekształcenie okręgu przyporządkowujące każdemu punktowi — punkt po przeciwnej stronie średnicy, nie ma punktów stałych.

Spójrzmy teraz na figurę $\mathcal{W}$ zwaną „okręgiem warszawskim" (nazwa nie jest aluzją do układu sieci komunikacyjnej stolicy, lecz przypomina czasy, w których Warszawa była centrum światowej topologii).

Ma okrąg warszawski własność punktu stałego, czy nie? Wskazując ciągłe odwzorowanie $\mathcal{W}$ w siebie nie mające punktu stałego dajemy negatywną odpowiedź na postawione pytanie.

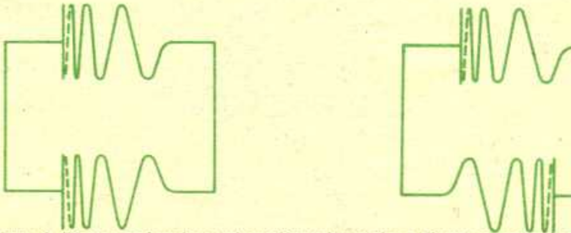
W przypadku zwykłego okręgu negatywnej odpowiedzi dostarczył antypodyzm, niestety tym razem bezużyteczny. Może więc nasze pytanie ma odpowiedź pozytywną? Właśnie! Niech f będzie dowolnym ciągłym odwzorowaniem $\mathcal{W}$ w siebie. Zabawmy się w psa i zająca. Psem niech będzie punkt $x \in \mathcal{W}$, zającem punkt $f(x) \in \mathcal{W}$. Pies startuje z punktu A (rysunek) i porusza się w kierunku punktów B, C i dalej serpentynami $\left(\right.$są one utworzone przez fragment wykresu funkcji $\left. x \rightarrow \sin \frac{1}{x}\right)$ w stronę odcinka AB. Zając ucieka przed psem i znajduje się wobec tego przed nim (strzałki wskazują kierunek). Przypuśćmy, że uda mu się umknąć, tzn. każdy punkt x znajduje się za $f(x)$. Każdy punkt $q \in AB$ jest granicą ciągu punktów $q_1, q_2, \ldots$ z „serpentynowej" części zbioru $\mathcal{W}$. Ponieważ jednak każdy punkt $f(q_i)$ znajduje się przed punktem q_i, więc ciąg $f(q_1), f(q_2), \ldots$ jest zbieżny do punktu należącego do odcinka AB, a więc (ciągłość!) $f(q) \in AB$.



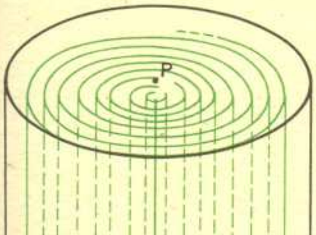
Rys. 2. Czy ta figura ma własność punktu stałego, czy nie?

Widzimy, że odwzorowanie f przekształcać musi odcinek AB znów w ten sam odcinek. Musi mieć zatem punkt stały, bo odcinek domknięty ma własność punktu stałego (patrz artykuł L. Górniewicza). Proponujemy Czytelnikowi zbadanie, czy figura złożona z koła i zagęszczającej się wokół niego spirali (rys. 2) ma własność punktu stałego, czy nie.

Na rysunku 3 widzimy dwie dość podobnie wyglądające figury, z których jedna ma własność punktu stałego, a druga nie. Łatwo to udowodnić, znów puszczając po nich psa i zająca.

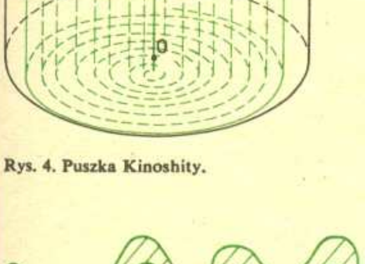


Rys. 3. Figura po lewej ma własność punktu stałego, figura po prawej nie ma.



Rys. 4. Puszka Kinoshity.

Następny rysunek 4 przedstawia jeszcze jedną figurę, która „powinna mieć" własność punktu stałego, a nie ma. Figura ta, zwana „puszką Kinoshity", jest cylindrycznym pudełkiem z jednym denkiem i włożoną do środka spiralnie zwiniętą (nieskończoną) taśmą. Przestrzeń ta „powinna mieć" własność punktu stałego, bo jest domknięta, ograniczona i „ściągalna": można ją łagodnie ściągnąć do punktu, nie zaklejając przy tym żadnej dziury (najpierw ściągamy cały walec do podstawy, potem podstawę do punktu). Przestrzenie ściągalne mają zaś wiele własności takich samych jak przestrzenie jednopunktowe. „Nie ma", bo wyobraźmy sobie następujące przekształcenie: najpierw obracamy całą puszkę o mały kąt. Punkty stałe mogą być tylko na pionowej osi puszki. Wobec tego przesuwamy nieco odcinek OP do góry, umieszczając go częściowo w spirali na wierzchu puszki. Wymaga to „wessania" choćby małego kółka denka wokół punktu O w odcinek OP, ale to nic nie szkodzi.



Rys. 5. Przestrzeń ściągalna i przestrzeń nieściągalna.

Trzeba ponadto lekko naciągnąć górną spiralę (oraz jej najbliższe otoczenie) tak, aby blisko punktu P nasze przekształcenie pokrywało się z wykonanym „przesunięciem" odcinka OP, a przy brzegu górnej podstawy — z wykonanym na początku obrotem.

Przedstawione przykłady mają ilustrować, że pojęcie „własności punktu stałego" jest nieco nietypowe i trudno znaleźć ogólną i głęboką jego teorię. Chyba że... (p. artykuł Krzysztofa S. Nowińskiego).

(opr. red. na podstawie listu mgr. *Sławomira KWASIKA*.)