W latach 1944—48 Morris Fergusson, Archibald i Wrench obliczyli 808 cyfr rozwinięcia dziesiętnego π, wykorzystując wzór

$$\frac{1}{4}\pi = 3\operatorname{arctg}\frac{1}{4} + \operatorname{arctg}\frac{1}{20} + \operatorname{arctg}\frac{1}{1985}$$

i sprawdzając obliczenia za pomocą zależności

$$\frac{1}{4}\pi = 3\operatorname{arctg}\frac{1}{4} + \operatorname{arctg}\frac{5}{99}$$

odkryli, że Shanks, który w XIX wieku obliczył ponad 700 cyfr π, pomylił się na 527 miejscu, wskutek opuszczenia składnika $1/29 \cdot 5^{22}$.

Jeśli wartość $x = \frac{1}{5}$ podstawimy do wzoru (8), a następnie zsumujemy n początkowych składników otrzymanego szeregu, otrzymamy liczbę $\operatorname{arctg}\frac{1}{5}$ z błędem mniejszym niż $1/(2n+1)\cdot 5^{2n+1}$ (dlaczego?). Podobnie dla $x = \frac{1}{239}$, suma m składników daje błąd mniejszy niż $1/(2m+1)\cdot 239^{2m+1}$. Mnożąc pierwszy z tych błędów przez 4 i dodając drugi, oszacujemy błąd przybliżenia liczby $\frac{1}{4}\pi$. Mnożąc jeszcze raz przez 4 ocenimy błąd przybliżenia π.

Celowe jest tu dobranie takich wartości n i m, aby błąd dla $4\operatorname{arctg}\frac{1}{5}$ był tego samego rzędu, co błąd dla $\operatorname{arctg}\frac{1}{239}$ (w przeciwnym razie obliczanie niektórych składników jest robotą daremną). Weźmy np. $n = 18$, $m = 5$. Krótki rachunek przekonuje nas, że wówczas pierwszy z tych błędów szacuje się przez $1{,}5 \cdot 10^{-27}$, a drugi przez $0{,}7 \cdot 10^{-27}$; łączny błąd przybliżenia liczby π otrzymanego w ten sposób nie przekracza 10^{-26}. Znaczy to, że dostajemy 25 dokładnych cyfr po przecinku!

100000 znaków, o których była mowa w pierwszym artykule można znaleźć w pracy: Daniel Shanks and John W. Wrench Jr., *Calculation of π to 100.000 Decimals*, w *Mathematics of Computation* 16(1962), str. 76–99

Wykonanie wszystkich potrzebnych tu obliczeń z potrzebną dokładnością zajęło piszącemu te słowa — przy użyciu ręcznego kalkulatorka (ośmiocyfrowego) — niecałą godzinę.

Popularny wierszyk „Kuć i orać..." (pierwsza część artykułu, Delta 6/1980) daje receptę na zapamiętanie 23 cyfr po przecinku. Wskazaliśmy metodę wyznaczania dalszych...

Czytelnik ma prawo poczuć się wyprowadzony w pole. Więc po to wypracowaliśmy tak różnorodne techniki, aby w końcu okazało się, że z przedstawionych metod najskuteczniejsza polega na całkiem elementarnym wykorzystaniu wzoru (8), wyprowadzonego dwa miesiące temu, na samym początku naszego cyklu!

3 1 4 1 5 9 2 6
Kto z woli i myśli zapragnie pi spisać
5 3 5
cyfry, ten zdoła...

Drogi Czytelniku — nie miej tego za złe. Wzory Leibniza, Eulera, Wallisa są dla obliczenia π mniej efektywne, niż wzór Machina. Ale prócz wartości użytkowej istnieje jeszcze wartość poznawcza. Czyż to nie fascynujące, że jedna i ta sama liczba π wykazuje tak przedziwne i różnorodne związki z arytmetyką, że można ją otrzymać jako sumy różnych szeregów, granice różnych ciągów?

3 1 4 1 5 9 2 6
Que j'aime à faire apprendre un nombre
5 3 5
utile aux sages!
Immortel Archimède, artiste ingénieux,
Qui de ton jugement peut priser la valeur?
Pour moi, ton problème eut de pareils avantages.

Wszystkie otrzymane wzory na π były wnioskami z równości ogólniejszych, dla funkcji. Analiza matematyczna jest ciekawa! Powiedzmy sobie szczerze: z całych naszych przeprowadzonych rozważań najbardziej interesujące jest to, że różne znane funkcje można przedstawiać w nieoczekiwanych postaciach: sum szeregów potęgowych, trygonometrycznych, iloczynów funkcji liniowych... Te przedstawienia („rozwinięcia") są o wiele ważniejsze, niż samo wyznaczanie kolejnych cyfr ludolfiny. Bo czymże jest obliczanie π? Miłą rozrywką, igraszką tylko, niczym więcej.

Zadania

Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

M 232. Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej N zachodzi równość

$$\tau(1)+\tau(2)+\ldots+\tau(N) = \left[\frac{N}{1}\right] + \left[\frac{N}{2}\right] + \ldots + \left[\frac{N}{N}\right]$$

($\tau(n)$ — liczba dzielników n, $[x]$ — część całkowita x).

Rozwiązanie na str. 9

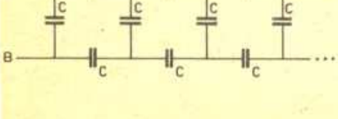
M 233. Czy istnieje sześciokąt S mający tę własność, że każdą parę jego boków widać z pewnego punktu wewnętrznego, ale nie istnieje punkt, z którego byłoby widać wszystkie sześć boków?

Rozwiązanie na str. 2

M 234. Wykazać, że pierwiastki kwadratowe trzech różnych liczb pierwszych nie mogą być wyrazami postępu geometrycznego.

Rozwiązanie na str. 4

Redaguje doc. dr Michał ŚWIĘCKI



F 79. Oblicz pojemność wypadkową C_{AB} narysowanego obok nieskończonego układu kondensatorów.

Rozwiązanie na str. 3

(A. Jurewicz)