Sytuacja jest więc nie lepsza, niż w przypadku wzoru Leibniza. Ale tylko na pozór. Możemy bowiem zastosować taką sztuczkę: do n-tej sumy częściowej dodajemy jeszcze składnik $\frac{1}{n}$;

$$s_n+\frac{1}{n}=\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right)+\frac{1}{n}.$$

Z uzyskanych oszacowań (10) wynika, że otrzymana wielkość — oznaczmy ją przez t_n — daje przybliżenie liczby $\frac{1}{6}\pi^2$ z nadmiarem, z błędem mniejszym niż $1/n^2$: $0<t_n-\frac{1}{6}\pi^2<\frac{1}{n^2}$.

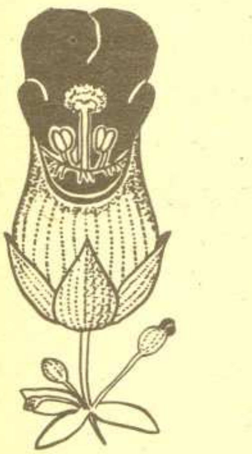
Stąd dostajemy $0<\sqrt{6t_n}-\pi<\frac{1}{n^2}$.

Obliczając $6t_n$ np. dla $n=100$ i wyciągając pierwiastek kwadratowy otrzymujemy więc wartość przybliżoną liczby π z dokładnością czterech znaków po przecinku. To już jest coś; czynności te możemy wykonać na kieszonkowym czterodziałaniowym kalkulatorze w ciągu kilkunastu minut.

Rozpatrując funkcje x^4, x^6, x^8, ... na przedziale $\langle -\pi, \pi\rangle$, przedłużając je przez okresowość do funkcji ciągłych na całej prostej R, rozwijając w szereg Fouriera, uwzględniając twierdzenie Dirichleta i wreszcie podstawiając $x=\pi$ dostajemy wzory analogiczne do wzoru Eulera, wyrażające liczby π^k przez sumy szeregów $\sum 1/n^k$, $k=4, 6, 8, \ldots$. I tak:

$$\frac{1}{90}\pi^4=1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\ldots,\quad \frac{1}{945}\pi^6=1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\ldots. \tag{11}$$

Czy wzory te nadają się do obliczania π? I tak, i nie. Prawda, że szeregi są zbieżne coraz szybciej; ale dochodzą współczynniki $\frac{1}{90}$, $\frac{1}{945}$ (dalsze mianowniki rosną w ogromnym tempie), no i dochodzi konieczność wyciągania pierwiastka: czwartego, szóstego stopnia itd. Obniża to, rzecz jasna, efektywność przybliżania. Spójrzmy jednak na wzory (9) i (11) „od drugiej strony". Zapomnijmy na chwilę o naszym zadaniu; w końcu, liczba π jest dość dokładnie znana. Samej zbieżności szeregów $\sum 1/n^2$, $\sum 1/n^4$, $\sum 1/n^6$ dowodzi się prościutko metodami bardzo elementarnymi. Ale wzory (9) i (11) dają nam wartości sum tych szeregów — trudne do wyznaczenia innym sposobem. Rozwijając w szereg Fouriera rozmaite funkcje i podstawiając za x różne punkty przedziału $\langle -\pi, \pi\rangle$ możemy w ten sposób wyznaczyć sumy bardzo wielu szeregów liczbowych — miła to i pożyteczna zabawa.



Znacznie mniej wiemy o sumie odwrotności trzecich potęg liczb naturalnych, czyli o sumie $1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\ldots$. Przedstawiony na Międzynarodowym Kongresie Matematyków w Helsinkach w 1978 roku wynik Apéry'ego mówiący, że liczba ta jest niewymierna, został określony mianem „sensacyjnego".

Naiwnością byłoby sądzić, że teoria szeregów trygonometrycznych została stworzona po to, by wyznaczać kolejne cyfry rozwinięcia π, czy też po to, by obliczać sumy szeregów liczbowych podobnych do tych, które występują we wzorach (9) i (11). Jest to ogromna teoria o nieprzebranym bogactwie zastosowań — praktycznych i teoretycznych. Ale to już zupełnie inna historia.

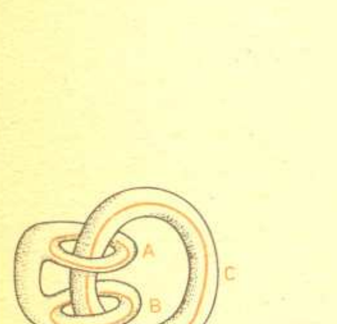
W następnym — trzecim i ostatnim — odcinku naszego serialu zaprezentujemy Czytelnikom jeszcze inne wzory wyrażające π jako wynik operacji granicznych na liczbach wymiernych. Uzasadniona jest nadzieja, że dokładność aproksymacji będzie coraz lepsza...

Zadania

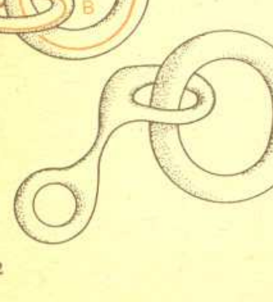
Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

M 229. Pociąg przejechał 320 km w 4 godziny. Wykazać, że pewien odcinek tej drogi o długości 80 km przejechał dokładnie w 1 godzinę.
Rozwiązanie na str. 12.

M 230. Czy można zabawkę wykonaną z plasteliny wg rysunku 1 zdeformować — bez rozrywania i ponownego sklejania — tak, aby przybrała postać przedstawioną na rys. 2? Chyba nie — wystarczy narysować okręgi A, B i C, by przekonać się, że rozłączyć ich nie można. Czy na pewno?
Rozwiązanie na str. 15.



Rys. 1



Rys. 2

M 231. Czy można ułożyć rozkład jazdy pociągu spełniającego warunki zadania M 229 tak, aby każdy studwudziestokilometrowy odcinek drogi był przebywany w czasie różnym od 1,5 godziny?
Rozwiązanie na str. 10.

Redaguje doc. dr Michał ŚWIĘCKI

F 78 Na rozgrzanej do czerwoności płycie metalowej krople wody wykonują bezładne ruchy. Dlaczego? Jak będzie wyglądał ruch kropel na poziomej płycie rozgrzanej tak, że tylko jej środek jest rozżarzony? (T. Tratkiewicz)
Rozwiązanie na str. 3.