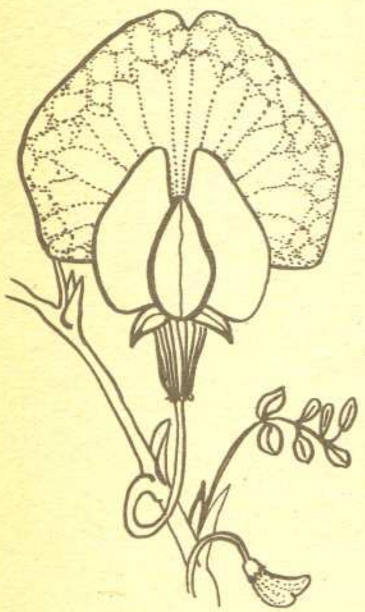
Obliczamy Π (II)

Dr Marcin E. KUCZMA



W poprzednim numerze mówiliśmy o rozwijaniu funkcji w szeregi potęgowe. Jako przykład posłużyła nam funkcja arcus tangens. Wyprowadziliśmy rozwinięcie

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \ldots, \quad |x| \leqslant 1, \tag{1}$$

skąd przez podstawienie $x = 1$ dostaliśmy wzór Leibniza

$$\frac{1}{4}\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots \tag{2}$$

Sumy częściowe szeregu po prawej stronie wzoru (2) dają wymierne przybliżenia liczby π. Niedogodność stanowi jednak to, że szereg ten jest zbieżny bardzo powoli.
Spróbujmy do naszego zagadnienia wykorzystać własności całkiem innej klasy szeregów funkcyjnych: szeregów trygonometrycznych. Są to szeregi postaci

$$a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + (a_3 \cos 3x + b_3 \sin 3x) + \ldots \tag{3}$$

A czy każdą funkcję 2π-okresową można, przez odpowiedni dobór współczynników a_n, b_n przedstawić jako sumę pewnego szeregu postaci (3)? Tu kilka słów wyjaśnienia na temat, skąd się wzięło to zagadnienie. Funkcję okresową można uważać za analityczny opis pewnego zjawiska fizycznego — ruchu drgającego. Szczególnym rodzajem drgań są tzw. drgania proste, tj. takie, gdzie wykresem jest linia sinusoidalna. Nietrudno przekonać się, że wykresem każdej funkcji typu $a \cos nx + b \sin nx$ jest sinusoida; mamy bowiem równość

$$a \cos nx + b \sin nx = A \sin(nx + \alpha), \tag{4}$$

gdzie $A = \sqrt{a^2 + b^2}$, zaś α jest wartością taką, że $\sin\alpha = a/A$, $\cos\alpha = b/A$. Tak więc wyrażenie typu (4) opisuje drgania proste o częstotliwości $n/2\pi$, amplitudzie A i przesunięciu w fazie o α.
Widzimy zatem, że problem rozwijalności danej funkcji okresowej $f(x)$ w szereg trygonometryczny (3) odpowiada zagadnieniu rozkładu ruchu okresowego na sumę drgań prostych o częstotliwościach $n/2\pi$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Jest to bardzo klasyczne zagadnienie mechaniki.
Przypuśćmy, że pewna funkcja okresowa $f(x)$ jest sumą szeregu postaci (3). Ustalmy liczbę naturalną n i pomnóżmy $f(x)$ przez $\sin nx$

$$\begin{aligned} f(x)\sin nx = {} & a_0 \sin nx + \\ & + a_1 \cos x \sin nx + b_1 \sin x \sin nx + \\ & + a_2 \cos 2x \sin nx + b_2 \sin 2x \sin nx + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + a_n \cos nx \sin nx + b_n \sin nx \sin nx + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{5}$$

Całkując otrzymaną równość w przedziale $\langle -\pi, \pi \rangle$ otrzymujemy:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \text{(suma całek składników po prawej stronie).}$$

(Przy całkowaniu sum nieskończonych konieczna jest pewna ostrożność — por. uwagi w poprzednim numerze; nie wdając się w szczegóły, ograniczymy się do stwierdzenia, że bardzo słabe założenia o funkcji f wystarczą, żeby takie całkowanie było dopuszczalne). Łatwy rachunek pokazuje, że całki $\int_{-\pi}^{\pi}$ wszystkich składników po prawej stronie wzoru (5) są zerami, z wyjątkiem jednego — mianowicie tego, w którym $\sin nx$ mnożymy przez $\sin nx$: $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx = \pi$. Stąd dostajemy

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \pi b_n. \tag{6}$$

Całkiem podobnie wykazuje się, że

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \pi a_n, \quad (n \geqslant 1) \quad \text{oraz} \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = 2\pi a_0. \tag{7}$$

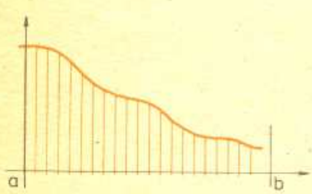
Wzory te pokazują, że współczynniki a_n, b_n w szeregu (3) są wyznaczone przez funkcję f jednoznacznie — otrzymuje się je obliczając powyższe całki i dzieląc przez π.
Nie daje nam to odpowiedzi na pytanie: czy każda funkcja 2π-okresowa daje się przedstawić w postaci (3)? Otóż — nie! Mając daną funkcję 2π-okresową f, możemy z nią związać — całkiem formalnie — szereg (3), w którym współczynniki a_n, b_n zdefiniowane są przez formuły (6), (7). Szereg ten nazywa się szeregiem Fouriera funkcji f. Piszemy:

$$f(x) \sim a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \ldots \tag{8}$$

Całkę funkcji ciągłej f po przedziale $\langle a, b \rangle$ można określać jako przyrost dowolnej funkcji pierwotnej F:

$$\int_b^a f(x) \, dx = F(b) - F(a).$$

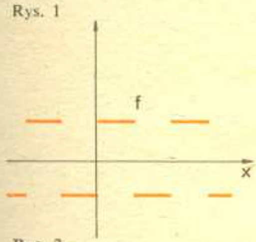
Geometrycznie, wyraża ona (w przypadku funkcji stale dodatnich) pole obszaru zawartego pomiędzy przedziałem $\langle a, b \rangle$ osi Ox i wykresem funkcji f na tym przedziale.



Znaczek $\sim$ wyraża niewiele: tylko tyle, że współczynniki a_n, b_n wyznaczone zostały według wzorów (6), (7). Z poprzednich rozważań wynika, że jeśli f w ogóle rozwija się w szereg trygonometryczny, to tym szeregiem jest właśnie szereg Fouriera funkcji f i żaden inny. Chcielibyśmy, by znaczek $\sim$ we wzorze (8) można było zastąpić znakiem $=$. Tak być jednak nie musi. Może się zdarzyć, że otrzymany szereg jest rozbieżny dla każdej wartości x! Może się też zdarzyć, że w pewnych punktach szereg ten jest zbieżny, ale ... wcale nie do wartości $f(x)$. Żeby jednak nie popaść w rozpacz, zaznaczmy od razu, że istnieją liczne twierdzenia pozytywne. W ogromnej mierze ich autorem lub inspiratorem jest matematyk niemiecki pochodzenia francuskiego Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805—59), którego pomysł polegał na wyrażeniu n-tej sumy częściowej szeregu (8) w formie pewnej całki. Nie możemy tu przytoczyć pełnego wywodu; ograniczymy się do sformułowania jednego z licznych twierdzeń Dirichleta:

Załóżmy, że funkcja 2π-okresowa f jest przedziałami monotoniczna. Wówczas: jeśli f jest ciągła w punkcie x, to we wzorze (8) *zachodzi równość; jeśli f jest nieciągła w punkcie x, to szereg we wzorze* (8) *zbieżny jest do sumy równej średniej arytmetycznej granic lewostronnej i prawostronnej funkcji f w tym punkcie* (rys. 1).

Rys. 1



Rys. 2

Przejdźmy teraz do przykładów. Weźmy (rys. 2) funkcję 2π-okresową f, równą 1 w przedziale $(0, \pi\rangle$ i -1 w przedziale $(-\pi, 0\rangle$. Obliczając jej współczynniki Fouriera według wzorów (6), (7) dostajemy: $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = 0$, $b_2 = b_4 = b_6 = \ldots 0$, $b_n = 4/\pi n$ dla n nieparzystych.

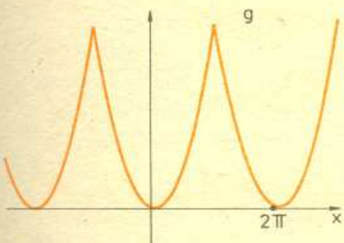
Zatem $$f(x) \sim \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x \ldots\right).$$

Dla $x = \frac{1}{2}\pi$ zachodzi równość, w myśl twierdzenia Dirichleta (jest to punkt ciągłości).

Oczywiście $f\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 1$. Podstawiając $x = \frac{1}{2}\pi$ dostajemy

$$1 = \frac{4}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\right),$$

czyli ... znów wzór Leibniza (2).



Rys. 3

Rozważmy teraz (rys. 3) funkcję 2π-okresową g, daną w przedziale $\langle -\pi, \pi\rangle$ wzorem $f(x) = x^2$. Formuły (6) i (7) dają nam teraz $a_0 = \frac{1}{3}\pi^2$, $a_n = (-1)^n 4/n^2$, $b_1 = b_2 = b_3 = \ldots = 0$.

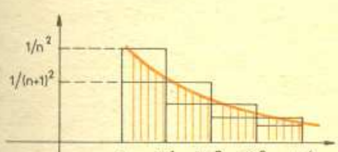
Stąd $g(x) \sim \frac{1}{3}\pi^2 + 4\left(-\cos x + \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{9}\cos 3x + \frac{1}{16}\cos 4x - \ldots\right)$.

Rozważana funkcja jest ciągła we wszystkich punktach, więc znak $\sim$ można zastąpić równością. Podstawiając $x = \pi$ otrzymujemy

$\pi^2 = \frac{1}{3}\pi^2 + 4\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots\right)$, skąd po przekształceniu

$$\frac{1}{6}\pi^2 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots \tag{9}$$

Jest to wzór Eulera (matematyk szwajcarski Leonhard Euler (1707—83) doszedł do niego na drodze innych rozważań).



Rys. 4

Całka $\int\limits_a^\infty$ tzw. całka niewłaściwa jest wartością graniczną całek $\int\limits_a^x$ gdy $x \to \infty$.

Jaką dokładność przybliżenia dają sumy częściowe szeregu we wzorze Eulera? Oznaczmy n-tą sumę częściową przez s_n, a przez r_n — to, co zostaje („reszta" albo „ogon"):

$$s_n = 1 + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n^2}, \qquad r_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots, \qquad \frac{1}{6}\pi^2 = s_n + r_n.$$

Spójrzmy teraz na rysunek 4. Krzywa na tym rysunku to wykres funkcji $1/x^2$ w przedziale $\langle n, \infty)$. Pole obszaru zacieniowanego równa się $\int\limits_n^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{n}$.

Pole obszaru pod „górnymi schodami" równa się $\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots = \frac{1}{n^2} + r_n$;

pole obszaru pod „dolnymi schodami" równa się $\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots = r_n$.

Zatem $r_n < \frac{1}{n} < \frac{1}{n^2} + r_n$, czyli

$$0 < \frac{1}{n} - r_n < \frac{1}{n^2}. \tag{10}$$

Znaczy to, że r_n $\left(\text{czyli błąd popełniany przez zastąpieniu liczby } \frac{1}{6}\pi^2 \text{ przez } s_n\right)$ jest wielkością rzędu $1/n$.

Sytuacja jest więc nie lepsza, niż w przypadku wzoru Leibniza. Ale tylko na pozór. Możemy bowiem zastosować taką sztuczkę: do n-tej sumy częściowej dodajemy jeszcze składnik $\frac{1}{n}$;

$$s_n + \frac{1}{n} = \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{n}.$$

Z uzyskanych oszacowań (10) wynika, że otrzymana wielkość — oznaczmy ją przez t_n — daje przybliżenie liczby $\frac{1}{6}\pi^2$ z nadmiarem, z błędem mniejszym niż $1/n^2$: $0 < t_n - \frac{1}{6}\pi^2 < \frac{1}{n^2}$.

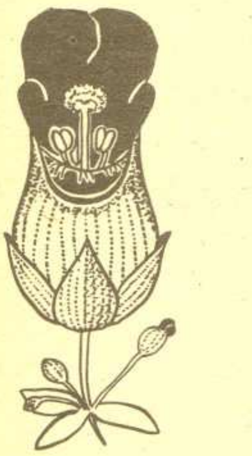
Stąd dostajemy $0 < \sqrt{6t_n} - \pi < \frac{1}{n^2}$.

Obliczając $6t_n$ np. dla $n = 100$ i wyciągając pierwiastek kwadratowy otrzymujemy więc wartość przybliżoną liczby π z dokładnością czterech znaków po przecinku. To już jest coś; czynności te możemy wykonać na kieszonkowym czterodziałaniowym kalkulatorze w ciągu kilkunastu minut.

Rozpatrując funkcje $x^4, x^6, x^8, \ldots$ na przedziale $\langle -\pi, \pi \rangle$, przedłużając je przez okresowość do funkcji ciągłych na całej prostej R, rozwijając w szereg Fouriera, uwzględniając twierdzenie Dirichleta i wreszcie podstawiając $x = \pi$ dostajemy wzory analogiczne do wzoru Eulera, wyrażające liczby π^k przez sumy szeregów $\sum 1/n^k$, $k = 4, 6, 8, \ldots$. I tak:

$$\frac{1}{90}\pi^4 = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \ldots, \quad \frac{1}{945}\pi^6 = 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \ldots. \tag{11}$$

Czy wzory te nadają się do obliczania π? I tak, i nie. Prawda, że szeregi są zbieżne coraz szybciej; ale dochodzą współczynniki $\frac{1}{90}$, $\frac{1}{945}$ (dalsze mianowniki rosną w ogromnym tempie), no i dochodzi konieczność wyciągania pierwiastka: czwartego, szóstego stopnia itd. Obniża to, rzecz jasna, efektywność przybliżania. Spójrzmy jednak na wzory (9) i (11) „od drugiej strony". Zapomnijmy na chwilę o naszym zadaniu; w końcu, liczba π jest dość dokładnie znana. Samej zbieżności szeregów $\sum 1/n^2$, $\sum 1/n^4$, $\sum 1/n^6$ dowodzi się prościutko metodami bardzo elementarnymi. Ale wzory (9) i (11) dają nam wartości sum tych szeregów — trudne do wyznaczenia innym sposobem. Rozwijając w szereg Fouriera rozmaite funkcje i podstawiając za x różne punkty przedziału $\langle -\pi, \pi \rangle$ możemy w ten sposób wyznaczyć sumy bardzo wielu szeregów liczbowych — miła to i pożyteczna zabawa.



Znacznie mniej wiemy o sumie odwrotności trzecich potęg liczb naturalnych, czyli o sumie $1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \ldots$. Przedstawiony na Międzynarodowym Kongresie Matematyków w Helsinkach w 1978 roku wynik Apéry'ego mówiący, że liczba ta jest niewymierna, został określony mianem „sensacyjnego".

Naiwnością byłoby sądzić, że teoria szeregów trygonometrycznych została stworzona po to, by wyznaczać kolejne cyfry rozwinięcia π, czy też po to, by obliczać sumy szeregów liczbowych podobnych do tych, które występują we wzorach (9) i (11). Jest to ogromna teoria o nieprzebranym bogactwie zastosowań — praktycznych i teoretycznych. Ale to już zupełnie inna historia.

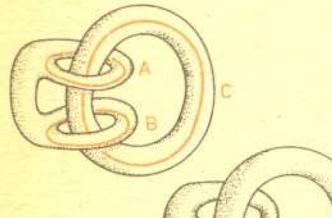
W następnym — trzecim i ostatnim — odcinku naszego serialu zaprezentujemy Czytelnikom jeszcze inne wzory wyrażające π jako wynik operacji granicznych na liczbach wymiernych. Uzasadniona jest nadzieja, że dokładność aproksymacji będzie coraz lepsza...

Zadania

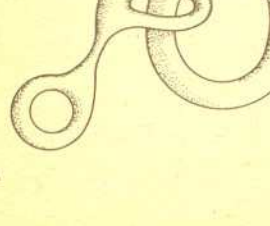
Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

M 229. Pociąg przejechał 320 km w 4 godziny. Wykazać, że pewien odcinek tej drogi o długości 80 km przejechał dokładnie w 1 godzinę.
Rozwiązanie na str. 12.

M 230. Czy można zabawkę wykonaną z plasteliny wg rysunku 1 zdeformować — bez rozrywania i ponownego sklejania — tak, aby przybrała postać przedstawioną na rys. 2? Chyba nie — wystarczy narysować okręgi A, B i C, by przekonać się, że rozłączyć ich nie można. Czy na pewno?
Rozwiązanie na str. 15.



Rys. 1



Rys. 2

M 231. Czy można ułożyć rozkład jazdy pociągu spełniającego warunki zadania M 229 tak, aby każdy studwudziestokilometrowy odcinek drogi był przebywany w czasie różnym od 1,5 godziny?
Rozwiązanie na str. 10.

Redaguje doc. dr Michał ŚWIĘCKI

F 78 Na rozgrzanej do czerwoności płycie metalowej krople wody wykonują bezładne ruchy. Dlaczego? Jak będzie wyglądał ruch kropel na poziomej płycie rozgrzanej tak, że tylko jej środek jest rozżarzony? (T. Tratkiewicz)
Rozwiązanie na str. 3.