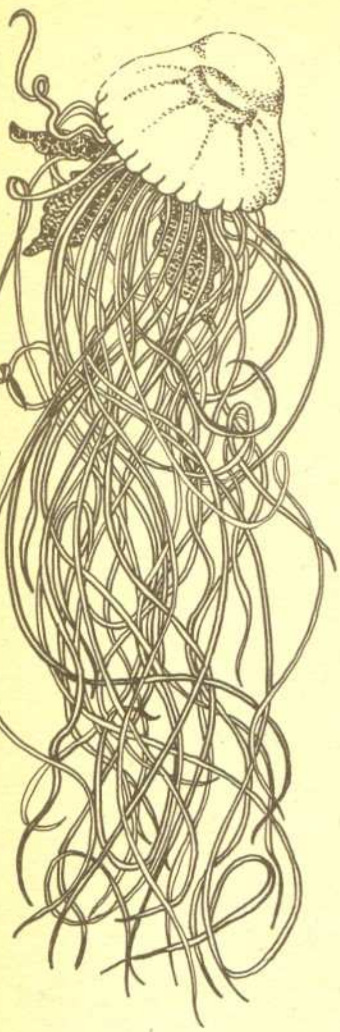
# Matematyka nowym rodzajem sportu?!



Pod takim tytułem ukazał się 19 marca 1957 roku w jednej z gazet w Chicago artykuł, w którym czytamy:
Grupa inżynierów, zaniepokojona pogłębiającymi się brakami w tym zawodzie, postanowiła zorganizować dla młodzieży zawody matematyczne w posługiwaniu się suwakiem. Organizatorzy mają nadzieję sprawić, że matematyka będzie równie popularna jak sport.
Pierwsze z planowanej serii zawodów odbyły się wczoraj w podmiejskiej Wheaton High School. Startowały siedmioosobowe drużyny, wyposażone w suwaki logarytmiczne. Zawody przebiegały nieco podobnie do pisemnych konkursów ortografii. Dyktowano zadania, które uczestnicy starali się jak najszybciej rozwiązać, gdyż od tego zależała liczba zdobytych punktów.
Za The Mathematics Magazine (1958), skąd zaczerpnęliśmy informację o tym konkursie, przytaczamy jedno z zadań:
Kiedy Rosjanie prześcigną nas co do liczby inżynierów, jeśli wiadomo, że kształcą 81 000 inżynierów rocznie, a my 28 000?
Obecnie my mamy 642 000, a Rosjanie 396 000 inżynierów.
Odejść na emeryturę ani zgonów nie uwzględniamy.
Zwycięzcą konkursu został George Guerin z Hinsdale High School i w nagrodę dostał oczywiście suwak logarytmiczny. Obcenie jest już z pewnością poważnym inżynierem. Ciekawe, czy organizuje zawody dla młodzieży w posługiwaniu się kalkulatorem? Jeśli tak, mielibyśmy zadanie:
Ilu Amerykanów powinno stanąć jeden na drugim, aby ten ostatni mógł wskoczyć do statku „Sojuz'' w jego perigeum? Zakładamy, że przeciętny wzrost Amerykanina wynosi 180 cm, perigeum Sojuza — 207 km, a rekord świata w skoku wzwyż — 235 cm. Ugięcia osób, znajdujących się na dole piramidy nie uwzględniamy.
Żarty żartami, ale do niektórych badań matematycznych trzeba rzeczywiście mieć żyłkę sportową. Matematyczne wyścigi „formuły I'' czyli poszukiwanie coraz to większej liczby pierwszej nie wymagają może od zawodników błyskawicznego refleksu i żelaznej kondycji, ale i tam i tu rekordy biją kierowcy (— naukowcy) fabryczni na specjalnie podrasowanym sprzęcie. Najnowszy rekord należy do Davida Slowinski'ego, który na maszynie CRAY-1 osiągnął znakomity wynik $2^{44497}-1$. Obliczenia wykonano 8 kwietnia 1979 roku, a była to niedziela (taniej, 7500 dolarów za godzinę pracy maszyny). Nie wiemy, ile czasu to trwało, ale szybkość CRAY-a jest wprost niewiarygodna. Dość powiedzieć, że wykazanie za pomocą tzw. testu Lucasa-Lehmera, iż liczba $2^{8191}-1$ jest pierwsza, zajęło w 1959 roku 100 godzin maszynie ILLIAC-I, 5 godzin i 12 minut maszynie IBM 7090 w 1962 roku, 49 minut ILLIAC-owi II w 1963 roku, 3 minuty i 10 sekund maszynie IBM 360/91 w 1971 roku a 10 sekund (dziesięć!) odpowiednio zaprogramowanemu CRAY-owi. Zgodnie z przyjętym w tym sporcie zwyczajem rekord stał się oficjalny po sprawdzeniu go przez poprzedniego rekordzistę, Curta Nolla.

### Historia rekordu świata w wyścigu po największą liczbę pierwszą

| Liczba | Ile cyfr | Rok | Kto |
|---|---|---|---|
| $2^{127}-1$ | 39 | 1876 | Lucas |
| $\frac{1}{17}(2^{148}+1)$ | 44 | 1951 | Ferrier |
| $1+114(2^{127}-1)$ | 41 | 1951 | Miller+Wheeler+EDSAC 1 |
| $180(2^{127}-1)^2+1$ | 79 | 1951 | Miller+Wheeler+EDSAC 1 |
| $2^{521}-1$ | 157 | 1952 | Lehmer+Robinson+SWAC |
| $2^{607}-1$ | 183 | 1952 | ,, ,, ,, |
| $2^{1279}-1$ | 386 | 1952 | ,, ,, ,, |
| $2^{2203}-1$ | 664 | 1952 | ,, ,, ,, |
| $2^{2281}-1$ | 687 | 1952 | ,, ,, ,, |
| $2^{3217}-1$ | 969 | 1957 | Riesel+BESK |
| $2^{4253}-1$ | 1 281 | 1961 | Hurwitz+Selfridge+IBM 7090 |
| $2^{4423}-1$ | 1 332 | 1961 | ,, ,, |
| $2^{9689}-1$ | 2 917 | 1963 | Gilies+ILLIAC 2 |
| $2^{9941}-1$ | 2 993 | 1963 | ,, ,, |
| $2^{11213}-1$ | 3 376 | 1963 | ,, ,, |
| $2^{19937}-1$ | 6 002 | 1971 | Tuckerman+IBM 360 |
| $2^{21701}-1$ | 6 533 | 1978 | Noll+Nickel+CYBER 174 |
| $2^{23209}-1$ | 6 987 | 8 II 1979 | Noll+CYBER 174 |
| $2^{23209}-1$ | 6 987 | 23 II 1979 | Slowinski+CRAY 1 |
| $2^{44497}-1$ | 13 395 | 8 IV 1979 | Slowinski+CRAY 1 |

Rozwiązanie zadania **M 231**.
Oznaczmy przez $v(t)$ prędkość pociągu w chwili $t$ i niech

$$v(t) = \begin{cases} 160 \text{ km/godz gdy } t \in (0, 1/3) \cup \left(1\frac{5}{6}, 2\frac{1}{6}\right) \cup \left(3\frac{2}{3}, 4\right) \\ \frac{160}{3} = 53\frac{1}{3} \text{ km/godz gdy } t \in \left(\frac{1}{3}, 1\frac{5}{6}\right) \cup \left(2\frac{1}{6}, 3\frac{2}{3}\right). \end{cases}$$

Łatwo sprawdzić, że warunki zadania są spełnione, a równocześnie w ciągu 1,5 godziny pociąg przebywa co najwyżej

$$\frac{1}{3}\cdot 160+\left(1\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{160}{3} = 115\frac{5}{9} \text{ km.}$$

Trwają też poszukiwania jak największych bliźniaczych (tj. różniących się o 2) liczb pierwszych. Obecny rekordowy wynik to 703-cyfrowe $1159142985 \cdot 2^{2304} \pm 1$. Sądzimy, że bliźniaczych liczb pierwszych jest nieskończenie wiele, ale dowodu jeszcze nikt nie podał. Gdyby tak rzeczywiście było to liczba

$$E = \liminf_{n \to \infty} \frac{p_{n+1} - p_n}{\ln p_n}$$

byłaby równa zeru (przez $p_n$ oznaczyliśmy $n$-tą kolejną liczbę pierwszą). Wprawny Czytelnik wykaże, że $E \leqslant 1$, ale poprawienie tego wyniku do $E < 1$ (Erdös) wymagało już pewnego wysiłku. Potem rezultat Erdösa poprawiali Rankin ($E \leqslant 57/59$), Ricci ($E \leqslant 15/16$) oraz Bombieri i Davenport $\left(E \leqslant (2+\sqrt{3})/8 = 0{,}4665\ldots\right)$. Śmierć Davenporta przerwała jego wysiłki przeskoczenia 0,46. W 1972 r. Piltiaj z Saratowa osiągnął $E \leqslant (2\sqrt{2}-1)/4 = 0{,}4571\ldots$, a w 1973 Huxley poprawił to na 0,4463... bijąc w 1977 r. własny rezultat o blisko cztery tysięczne: $E \leqslant 0{,}4425\ldots$.

Różnica $p_{n+1} - p_n$ może też być oszacowana przez pewną potęgę $p_n$: gdy $n$ dąży do nieskończoności, to przy każdym $\varepsilon > 0$ różnica $p_{n+1} - p_n$ jest wielkością nieskończenie małą względem pewnej potęgi $p_n^{a+\varepsilon}$, gdzie $a$ jest pewną stałą. Najlepsze znane dziś oszacowanie dla $a$ uzyskali w zeszłym roku D. R. Heath-Brown i matematyk warszawski H. Iwaniec. Nie należy go mylić z Haliną Iwaniec (Wisła Kraków), gwiązdą polskiej koszykówki.

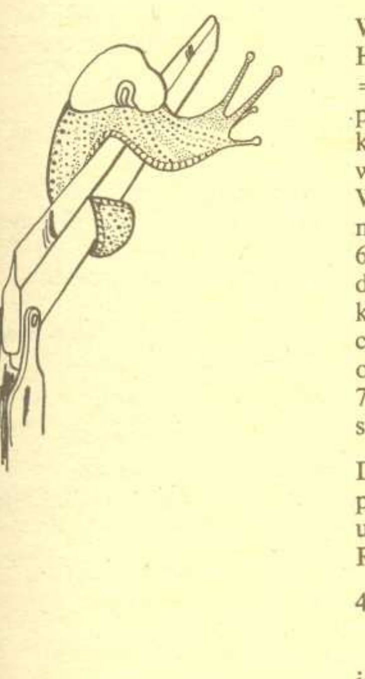
Klasyczną, ale bardzo trudną technicznie konkurencją jest Wielkie Twierdzenie Fermata. W 1637 roku Piotrowi Fermatowi nie chciało się sięgnąć po dodatkową kartkę, aby na niej zapisać dowód, że równanie

$$x^n + y^n = z^n$$

nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych $x$, $y$, $z$ (jeśli tylko $n > 2$). Dowód, który podobno znalazł Fermat, nie mieścił mu się na maginesie czytanej przez niego książki... ale wielcy i mali matematycy do dziś nie potrafią dowieść tego twierdzenia. Od czasu do czasu ktoś tylko powiększa zbiór wykładników $n$, dla których równanie Fermata na pewno nie ma rozwiązań. Jednym z najnowszych wyników jest 125 000 (Samuel, Wagstaff, 1978): jeżeli rozwiązanie jest, to na pewno wykładnik $n$ jest większy niż 125 000. Nie ma więc nadziei, aby ewentualny kontrprzykład (czyli rozwiązanie równania) znalazł komputer. Uprawianie Wielkiego Twierdzenia Fermata wymaga znacznej sprawności ogólnej i długiego treningu specjalistycznego. Liczne próby nieprzygotowanych amatorów przypominają próby bicia rekordu świata w skoku o tyczce... bez tyczki („... cholernie przeszkadza na rozbiegu...").

Matematyk niemiecki Edmund Landau miał pocztówki z wydrukowanym tekstem, które wysyłał autorom dowodów Wielkiego Twierdzenia Fermata:
„Na stronie ............ w wierszu ............ jest błąd".
(Znalezienie błędu należało do docenta katedry, którą kierował Landau).

Wiele samozaparcia wymaga obliczanie kolejnych (gdzieś tak od dwudziestej...) cyfr rozwinięcia $\pi$, $\sqrt{2}$, e lub innej liczby niewymiernej. Ta konkurencja przypomina trochę rzut oszczepem: znana od dawien dawna, efektowna, wyniki długie, a nieco niezdrowa i łatwo w niej o kontuzje. O ile wiemy, aktualny rekord w $\pi$ pochodzi aż z 1967 roku: 500 000 miejsc po przecinku.



W trudnym roku 1943 wykładowca jednego z amerykańskich college'ów, Horace S. Uhler postanowił obliczyć wszystkie cyfry liczby $1000! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 997 \cdot 998 \cdot 999 \cdot 1000$. Z początku wystarczał mu ołówek, potem pracował na biurowym arytmometrze i co kilka miesięcy publikował swoje kolejne wyniki (100!, 150!, 200!, itd.) w The Mathematical Gazette. Alianci wygrali wojnę, nad Japonią wybuchły bomby atomowe, ukończono kanał Wołga-Don, zdobyto pierwszy szczyt ośmiotysięczny, wynaleziono maszyny matematyczne i rozpoczęto ich produkcję, a Uhler wciąż publikował: 600!, 650!, 700!, 750! (dziś z taką liczbą publikacji można zostać co najmniej docentem). Pewnego jesiennego dnia 1953 roku spotkał w parku swego dawnego kolegę, który teraz pracował przy obsłudze maszyny UNIVAC. „Załatwię ci czas na maszynę" — obiecał. 27 października 1953 r. UNIVAC w $2\frac{1}{2}$ minuty obliczył iloczyn $751 \cdot 752 \cdot \ldots \cdot 1000$ i pomnożył przez podane mu przez Uhlera 750! „To najszczęśliwszy dzień w moim życiu — powiedział Uhler, gdy zobaczył swoje 1000! = 4023872600770937735...00000 (249 zer na końcu).

Dziś nie ma już w wielkim sporcie prawdziwych amatorów, ale upowszechnienie przyrządów elektroniczych spowodowało znaczne zwiększenie dopływu utalentowanej młodzieży do trudnych, acz dziwacznych konkurencji obliczeniowych. Redakcja Delty nie ma pewności, czy znany jej rezultat

$$4^{10}+6^{10}+7^{10}+9^{10}+3^{10}+0^{10}+7^{10}+7^{10}+7^{10}+4^{10} = 4679307774$$ (tyle cyfr, jaki wykładnik)

jest rekordem świata w konkurencji, którą reprezentuje (czyli gimnastyce artystycznej), ale chyba tak jest, choć wynik jest dość stary (1963). Przestrzegamy jednak, że gimnastyka artystyczna nie jest jeszcze dyscypliną olimpijską i poprawienie cytowanego wyniku nie przyniesie rekordziście dużej sławy.

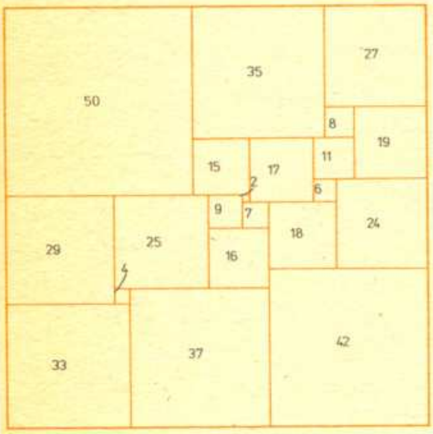
Nietrudno przedstawić liczbę 1 w postaci sumy odwrotności różnych liczb $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$. Znacznie trudniej (a jak?) zrobić to przy dodatkowym założeniu, że liczby stojące w mianownikach są nieparzyste, a nie można (dlaczego?) tego dokonać biorąc tylko liczby pierwsze. Skoro tak, to dopuśćmy do startu liczby semipierwsze. Tak nazywamy liczby będące iloczynem dwu różnych liczb pierwszych (np. 6, 85, 187, 3992003). Czy można przedstawić 1 jako sumę odwrotności liczb semipierwszych? Jak to zrobić, by składników było jak najmniej? Mamy nadzieję, że każdy z naszych Czytelników spostrzeże od razu, że 48 składników wystarczy:

$3992003 = 1997 \cdot 1999$.

$$1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \frac{1}{26} + \frac{1}{33} + \frac{1}{34} + \frac{1}{35} + \frac{1}{38} + \frac{1}{39} +$$
$$+ \frac{1}{46} + \frac{1}{51} + \frac{1}{55} + \frac{1}{57} + \frac{1}{58} + \frac{1}{62} + \frac{1}{65} + \frac{1}{69} + \frac{1}{77} + \frac{1}{82} + \frac{1}{85} + \frac{1}{86} +$$
$$+ \frac{1}{87} + \frac{1}{91} + \frac{1}{93} + \frac{1}{95} + \frac{1}{115} + \frac{1}{119} + \frac{1}{123} + \frac{1}{133} + \frac{1}{155} + \frac{1}{187} + \frac{1}{203} +$$
$$+ \frac{1}{209} + \frac{1}{215} + \frac{1}{221} + \frac{1}{247} + \frac{1}{265} + \frac{1}{287} + \frac{1}{289} + \frac{1}{319} + \frac{1}{323} + \frac{1}{391} +$$
$$+ \frac{1}{689} + \frac{1}{731} + \frac{1}{901}$$

i wyrówna w ten sposób rekord świata należący od 1978 roku do Amerykanina Allana Johnsona. Ta konkurencja należy wyraźnie do lekkoatletyki (biegi długie).

Nie tracą na popularności i stare arystokratyczne sporty, wśród nich „narzutka Mrs Perkins", rodem z samego Cambridge. Celem tej gry jest złożenie kwadratu z kwadratów mniejszych, każdy inny. Przed wojną próbowało to zrobić (bezskutecznie) wielu matematyków m.in. i nasz reprezentant Hugo Steinhaus, a jako pierwszy zeszył narzutkę p. Perkins (z 55 kawałków) matematyk niemiecki Sprague w 1939 roku. W rok później Stone i Tutte obyli się 28 kawałkami, przy czym przy próbach konstrukcji wykorzystywali teorię sieci elektrycznych. Dalsze kamienie milowe tej konkurencji to 26 kwadracików (Stone, Tutte, Smith i Brooks, 1945) i 24 (Wilcox, 1948). Ten ostatni rekord wytrzymał 30 lat, aż w 1978 roku Holender Dwijvestijn osiągnął 21 pkt (tj. kawałków) i ku niewątpliwemu zmartwieniu Mrs. Perkins wykazał, że mniej kwadracików nie wystarczy. Myli się jednak ten kto sądzi, że „narzutki" nie można już dalej uprawiać. Jak w koszykówce, należy tylko zmodernizować zasady i gra znów atrakcyjna:




Wyobraźmy sobie, że do górnego i dolnego brzegu kwadratu podłączony jest prąd i że opór całego kwadratu wynosi R. Jeżeli kwadrat nasz jest pocięty na pewną liczbę segmentów, to opór każdego segmentu jest wprost proporcjonalny do jego długości, a odwrotnie proporcjonalny do szerokości. Zatem jeżeli te segmenty są kwadratami, to wszystkie mają jednakowy opór. Innymi słowy, pocięcie dużego kwadratu na małe kwadraciki wyznacza sieć elektryczną, w której pewna liczba oporników o tym samym oporze $R$ jest połączona tak, by opór całej sieci też był równy $R$. Odwrotnie, mając taką sieć, możemy dostać pewne informacje o możliwości podziału kwadratu na mniejsze kwadraciki. Wiele informacji na ten temat zawiera m.in. artykuł Marka Penszki w „Problemach", nr 1/1980.

Dany kwadrat $n \times n$ rozciąć na jak najmniejszą liczbę mniejszych kwadratów. Długości boków mają być względnie pierwszymi liczbami naturalnymi, mogą się jednak powtarzać.

Wiadomo, że w tej zmodernizowanej wersji minimalna liczba kwadratów jest nie mniejsza niż $\log_2 n$, nie przekracza jednak min $\left(6\log_2 n,\ 6\sqrt[3]{n}+1\right)$. Rekordy do pobicia zaczynają się od $n = 14$ (dla $n = 14, 15, 16, 17$ najlepszy wynik to 12, ale może możliwe jest 11; dla $n = 18, 19, 20, 21, 22, 23$ — 13, a czy można 12? itd.)

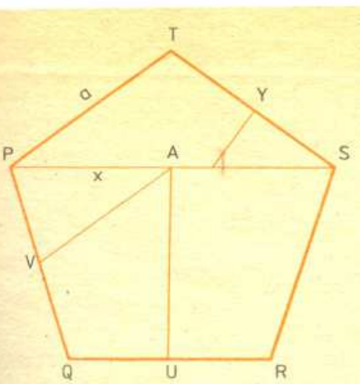
Czy można rozciąć pięciokąt foremny na 5 części tak, aby dało się z nich potem złożyć kwadrat? Spójrzmy na rysunek 1. Środek $A$ cięciwy $\overline{PS}$ pięciokąta $PQRST$ łączymy ze środkiem $U$ podstawy $\overline{QR}$ (oczywiście $\overline{AU} \perp \overline{QR}$). Prowadzimy $\overline{AV}$ równoległe do $\overline{PT}$, a ze środka $Y$ boku $\overline{TS}$ wystawiamy prostopadłą (albo: łączymy $Y$ z $Q$) aż do przecięcia z $\overline{PS}$. Z tych części składamy kwadrat (rysunek 2). Ejże? Obliczymy dość łatwo (albo znajdziemy odpowiednie wzory w tablicach logarytmicznych W. Wojtowicza), że na rysunku 2

$$AP = x = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = 0{,}951\ldots$$

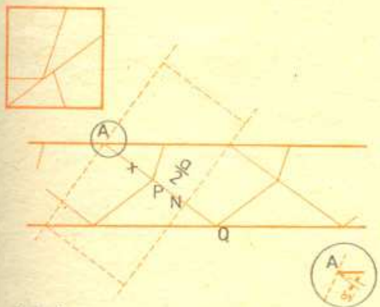
$$PN = \frac{1}{2}a = \frac{1}{4}\sqrt{2\left(5-\sqrt{5}\right)} = 0{,}588\ldots$$

(za jednostkę długości przyjęliśmy promień koła opisanego na pięciokącie).

**Rozwiązanie zadania M 229.**
Niech dla $t \in \langle 0, 3 \rangle$ funkcja $s(t)$ będzie określona przez: $s(t)$ — droga przejechana w czasie $\langle t, t+1 \rangle$. Gdyby dla wszystkich $t$ było $s(t) < 80$ km, to droga przejechana w 4 godziny byłaby równa $s(0)+s(1)+s(2)+s(3) < 320$. Podobnie wykluczamy przypadek $s(t)$ stale większego niż 80 km. Funkcja $s$ jest ciągła, a zatem dla pewnego $t_0$ mamy $s(t_0) = 80$ km.



Rys. 1



Rys. 2

Natomiast *AN*, jako długość boku kwadratu o polu równym polu pięciokąta jest równe

$$AN = \sqrt{\frac{5}{8}\sqrt{2(5+\sqrt{5})}} = 1{,}542\ldots \neq 0{,}951\ldots + 0{,}588\ldots = 1{,}539\ldots.$$

A zatem *A*, *P*, oraz *N* nie leżą na jednej prostej. Proste *AP* i *AN* tworzą kąt ok. 0°9′. Możliwe do wykrycia dopiero bardzo precyzyjnym rysunkiem albo obliczeniami z dokładnością do czterech cyfr znaczących!
Jeżeli ktoś znajdzie nieoszukany podział pięciokąta foremnego na pięć części, z których można złożyć kwadrat, poprawi najlepszy znany do tej pory wynik o 1 pkt. Widzieliśmy oto przed chwilą, że w matematycznych sportach też można faulować.
W 1972 roku Harry Lindgren, urzędnik w Biurze Patentowym w Canberra (któż to jeszcze zaczynał swoją karierę w Urzędzie Patentowym?) wydał książkę o rozcinaniu figur (i składaniu z nich nowych). Książka ta jest dostępna w Polsce dzięki rosyjskiemu przekładowi i zawiera wiele ćwiczeń z pięknej dyscypliny sportu: jak pociąć coś na najmniejszą liczbę części, z których da się następnie złożyć inne coś? Ale to już nie tylko zabawa, bo blisko stąd do zagadnienia rozpoznawania obrazów przez komputer, a to już takie ważne, że ho, ho!
A poszukiwanie coraz szybszych algorytmów (Delta 6/1980) np. rozwiązywania układów równań liniowych? Sport to, czy poważne badania? Nie ma wątpliwości, że... no, co?
A pogoń za coraz ogólniejszymi definicjami, twierdzeniami, lepszymi metodami? A budowa dróg pozwalających na szybkie dotarcie do dziewiczych gór?
Tyle o „sporcie w matematyce". A „matematyka w sporcie"? Banki informacji, wykresy, tabele, analiza szans? Dlaczego lepiej rzucać dyskiem pod wiatr niż z wiatrem? Czy wiatr przeszkadza długodystansowcom wiejąc im w twarz na prostej, czy pomaga — bo na przeciwległej prostej ich popycha? Czy zawsze opłaca się wygrać, by wygrać naprawdę? Dlaczego 1:1 to „zwycięski remis"? To wszystko ważne, ale niezbyt głębokie ani nawet niezbyt interesujące matematycznie. Zaciekawił nas jednak artykuł Michaela Deakina (*The Mathematical Gazette*, 1967) „Oszacowanie możliwości w lekkiej atletyce". Autor analizował historię rekordu świata w biegu na jedną milę i starał się odgadnąć, po jakiej krzywej idą wyniki. Ostatnim uwzględnionym przez Deakina rekordem było 3:53,6 Michela Jazy (19 oficjalny rekord świata w tej konkurencji, licząc od 4:12,6 Tabera w 1915 r.), a krzywą, którą zaproponował była

$$Y = a - \frac{2b}{\pi}\,\mathrm{arctg}(cn+p),$$

gdzie $n$ — numer kolejnego rekordu, $Y$ — odchyłka wyniku od 4 minut (w dziesiętnych sekundy), natomiast

$$a = 195, \quad b = 455, \quad c = 0{,}05, \quad p = 0{,}15.$$

Możemy stąd łatwo obliczyć, jaką granicę ludzkich możliwości przewidywał Deakin:

$$g = \lim_{n\to\infty}\left(a - \frac{2b}{\pi}\,\mathrm{arctg}(cn+p)\right) = \ldots$$

Może ktoś z Czytelników w przerwach w transmisji z Moskwy sprawdzi, jak spełniły się przepowiednie Deakina sprzed 13 lat. A może zaproponujecie inną krzywą?
Tyle o podobieństwach między sportem a matematyką. A różnice? Są i różnice (zajrzyjcie do Kącika Czytelniczego).

(*Sz.*)

Rekord świata w biegu na milę

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 4:12,8 | George (nie uznany) | 1885 |
| 1 | 4:12,6 | Taber | 1915 |
| 2 | 4:10,4 | Nurmi | 1923 |
| 3 | 4:09,2 | Ladoumègue | 1931 |
| 4 | 4:07,6 | Lovelock | 1933 |
| 5 | 4:06,7 | Cunningham | 1934 |
| 6 | 4:06,4 | Wooderson | 1937 |
| 7 | 4:06,2 | Hägg | 1942 |
| 8 | 4:06,2 | Anderson | 1942 |
| 9 | 4:04,6 | Hägg | 1942 |
| 10 | 4:02,6 | Anderson | 1943 |
| 11 | 4:01,6 | Anderson | 1944 |
| 12 | 4:01,3 | Hägg | 1945 |
| 13 | 3:59,4 | Bannister | 1954 |
| 14 | 3:57,9 | Landy | 1954 |
| 15 | 3:57,2 | Ibbotson | 1957 |
| 16 | 3:54,5 | Elliot | 1958 |
| 17 | 3:54,4 | Snell | 1962 |
| 18 | 3:54,1 | Snell | 1964 |
| 19 | 3:53,6 | Jazy | 1965 |
| 20 | 3:51,3 | Ryun | 1966 |
| 21 | 3:51,1 | Ryun | 1967 |
| 22 | 3:51,0 | Bayi | 1975 |
| 23 | 3:49,4 | Walker | 1975 |
| 24 | 3:49,0 | Coe | 1979 |

NIEDZIELI ● ECHA NIEDZIELI ●

WSZYSTKIE WEKTORY W JEDNYM KIERUNKU

Przegląd Sportowy, 29 stycznia 1980