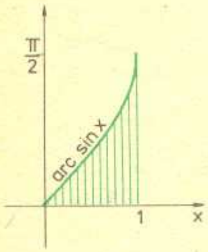
Znaczy to, że z dwóch kolejnych wartości przybliżonych s_n, s_{n+1} co najmniej jedna daje błąd większy niż $\frac{1}{4n+2}$. A jeszcze trzeba ten błąd pomnożyć przez 4 $\left(\text{bo przecież interesuje nas liczba } \pi\text{, a nie } \frac{1}{4}\pi\right)$. Więc nie tędy droga do obliczenia π; lub raczej wiedzie tędy droga, ale bardzo żmudna, niewiele skuteczniejsza, niż rzucanie patyczkiem na poliniowaną płaszczyznę. Po prostu: szereg (4) okazuje się być bardzo powoli zbieżny.

Więc może by spróbować z funkcją arcus sinus? Procedura jest zasadniczo ta sama, co w przypadku funkcji arcus tangens. Najpierw znajduje się rozwinięcie pochodnej $1/\sqrt{1-x^2}$, potem się całkuje. Wyprowadzenie jest jednak bardziej skomplikowane niż poprzednio, również wynik mniej zachęcający:

$$\arcsin x = x+\frac{1}{2\cdot 3}x^3+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7+\ldots, \quad |x|\leqslant 1. \tag{5}$$



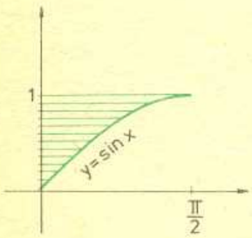
Po podstawieniu $x = 1$:

$$\frac{1}{2}\pi = 1+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}+\ldots.$$

Ten szereg nie jest wcale zbieżny szybciej niż szereg (4). W połączeniu ze skomplikowaną postacią jego składników powoduje to, że do naszego celu jest on jeszcze mniej dogodny.

Interesujące jest natomiast samo przedstawienie funkcji arcus sinus w formie sumy szeregu potęgowego (5).

Gdy już mowa o funkcji arcus sinus, nadmieniamy tu, że w metodzie doświadczalno-probabilistycznej, opisanej na początku, wspomniana wartość prawdopodobieństwa $1-2/\pi$ jest wynikiem obliczenia całki



$$\frac{2}{\pi}\int_0^1 \arcsin x \, dx.$$

Czytelnicy znający trochę technikę całkowania mogą bez trudu sprawdzić, że całka ta istotnie równa jest $1-2/\pi$. Wszystkim natomiast proponujemy zastanowienie się, dlaczego badane prawdopodobieństwo wyraża się taką właśnie całką. A za miesiąc pokażemy różne inne ładne wzory, w których występuje magiczna liczba π.

Zadania

Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

M 226. Uzasadnić następujący sposób poprawiania przybliżonej wartości x pierwiastka kwadratowego z liczby a większej od jedności:

$$x' = x+\Delta/2-\Delta^2/8x, \qquad \text{gdzie } \Delta = \frac{a}{x}-x = \frac{a-x^2}{x}$$

Rozwiązanie na str. 16.

M 227. Siatkę linii równoległych o stałych odstępach a nałożono na krzywą na płaszczyźnie i policzono liczbę przecięć krzywej z prostymi siatki. Operację powtórzono sześciokrotnie, obracając siatkę za każdym razem o 30°. Wykazać, że łączna liczba przecięć jest w przybliżeniu proporcjonalna do długości krzywej i znaleźć współczynnik proporcjonalności.

Rozwiązanie na str. 16

M 228. Na prostokąt $ABCD$ nakładamy siatkę hiperbol równoosiowych $xy = n$ tak, aby jego boki AB i AC padły na asymptoty (osie x i y).

Jak wykorzystać ten „przyrząd" do mierzenia pola trójkąta?

Rozwiązanie na str. 6

Redaguje doc. dr Michał ŚWIĘCKI

F 77. Dwie równoległe płyty zanurzono pionowo do połowy

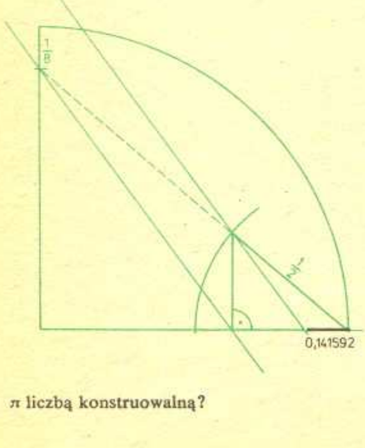
(a) w cieczy zwilżającej materiał obu płyt,

(b) w cieczy nie zwilżającej żadnej z płyt oraz

(c) w cieczy zwilżającej jedną i nie zwilżającej drugiej płyty.

Jaki będzie kierunek sił działających między płytami w każdej z opisanych sytuacji?

Rozwiązanie na str. 7.



π liczbą konstruowalną?