Obliczamy Π (I)

Dr Marcin E. KUCZMA

„Kuć i orać
W dzień zawzięcie,
Bo plonów
Niema bez trudu!
Złocisty szczęścia okręcie,
Kołyszesz...
Kuć!
My nie czekajmy cudu.
Robota
To potęga ludu".

Kazimierz Cwojdziński

Cytowany wyżej wiersz opublikował Kazimierz Cwojdziński w 1930 roku w czasopiśmie „Parametr" z następującym anonsem: Autor prosi Redakcję, by wezwała Czytelników do napisania lepszego wiersza. Za najgładszy, elegancki i dowcipny wiersz Autor powyższego wypłaci 50 złotych polskich. Twórcy zbyt lichych wierszyków zapłacą karę do 10 złotych. Autor chce sam być sędzią! Przypisek redakcji „Parametru". Redakcja niezwłocznie zwróciła się do Autora z żądaniem zapłacenia 10 złotych kary. Przypisek redakcji „Delty". I my czekamy na liche wierszyki (100 zł).

Dla $x \in \langle -1, 1\rangle$, arc sin x jest to jedyna liczba $\alpha \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$ taka, że $\sin \alpha = x$.
Dla $x \in R$, arc tg x jest to jedyna liczba $\beta \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$ taka, że $\operatorname{tg} \beta = x$.

Ułamek $\frac{833719}{265381}$ ma rozwinięcie 3,14159265358... i daje wobec tego przybliżenie π z dokładnością do 12 znaków. Do zapamiętania tego ułamka mamy następujący dwuwiersz

Dividing top lot through (a nightmare)
by a number below, you approach π

Zamiast przekładać na polski, od razu zapłaciliśmy sobie 100 zł.

Nie jest naszą rzeczą analizować wartości literackie przytoczonego utworu. Jest on powszechnie znany, trafił nawet do niektórych wydań szkolnych podręczników geometrii. Dlaczego właśnie geometrii? Stworzony bowiem został według „geometrycznej" recepty zalecającej, aby kolejne wyrazy miały ściśle określoną liczbę liter; o treść mniejsza. Długości wyrazów mają odpowiadać kolejnym cyfrom zapisu dziesiętnego liczby π:

$$\pi = 3{,}14159265358979323846264\ldots$$

Istnieje wiele innych tekstów ułożonych według tej samej recepty; niektóre z nich (w różnych językach) cytuje S. Jeleński w swojej wdzięcznej książce „Śladami Pitagorasa", wraz z innymi ciekawostkami na temat π.

Czytelnicy wiedzą o liczbie π co nieco. Określana jako stosunek długości okręgu do średnicy, nazywana czasem *ludolfiną* — od imienia matematyka i filozofa holenderskiego Ludolfa van Ceulen (1540—1610), który się nią z upodobaniem zajmował — jest jedną z ważniejszych stałych w matematyce. Prastare geometryczne zadanie skonstruowania odcinka długości π metodami platońskimi („kwadratura koła") jest nierozwiązalne, bowiem liczba ta nie jest *algebraiczna* — co zostało udowodnione w roku 1882 przez Lindemanna. Niealgebraiczność pociąga niewymierność. Tak więc zapis dziesiętny π nie jest skończony ani nawet okresowy. Można co najwyżej wyznaczać coraz to dalsze cyfry tego zapisu, a do ich zapamiętania używać wierszyków podobnych do przytoczonego na wstępie.

Czy jednak nasi Czytelnicy postawili sobie kiedyś pytanie: jak te cyfry wyznaczać? Skąd właściwie wiadomo, że pierwsze 23 cyfry po przecinku są właśnie takie, jak wyżej napisaliśmy? Narysować bardzo duży okrąg i bardzo dokładnie wymierzyć?

Nonsens!

Trudno również zawierzyć *metodzie doświadczalno-probabilistycznej*. Co to za metoda? Bierzemy duży arkusz papieru w linie (najlepiej całą płaszczyznę) i rzucamy nań kawałek patyczka o długości równej odstępowi między liniami. Rzucamy z wysoka (najlepiej z nieskończoności) bacząc przy tym, aby położenie patyczka po upadku na papier było całkowicie losowe, z równomiernym rozkładem prawdopodobieństwa. Wówczas prawdopodobieństwo tego, że patyczek po upadku nie przetnie żadnej linii wyraża się wielkością $1-2/\pi$. Wystarczy więc prowadzić ewidencję „przeciął — nie przeciął" w serii rzutów i rzucać dostatecznie długo ($n \to \infty$). Odpowiedni iloraz będzie dążył do podanej wartości... Kiedyś, w latach szczenięcych, przeprowadziłem to doświadczenie, rzucając przez godzinę (nie pamiętam, jakie było n). Wyszło mi, że π leży gdzieś między 2 a 5. Dziś, po latach, wydaje mi się, że ten wynik należy uznać za bardzo pomyślny...

Aby móc potraktować sprawę poważnie, chcąc znaleźć wymierne przybliżenie liczby π z zadaną z góry dokładnością, uciec się musimy do metod analizy matematycznej. A konkretnie — do pojęcia *szeregu* i *całki*.

Aparat ten zastosujemy do funkcji trygonometrycznych oraz odwrotnych do nich — funkcji *cyklometrycznych*: *arcus sinus* i *arcus tangens*.

Te ostatnie mają pewną bardzo pożyteczną własność, na której zasadza się większość znanych metod przybliżania π: ich pochodne są funkcjami elementarnymi:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arc\,sin} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{arc\,tg} x = \frac{1}{1+x^2}.$$

Jednocześnie wartości tych funkcji w pewnych punktach „wygodnych dla rachunków" (np. w punkcie $x = 1$) wyrażają się wymiernie przez π:

$$\operatorname{arc\,sin} 1 = \frac{1}{2}\pi, \qquad \operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{1}{4}\pi.$$

O tym, jak można wykorzystać zespół tych własności, przekona nas następujące rozumowanie. Rozpatrzmy postęp geometryczny $1, q, q^2, q^3, \ldots$. Wiemy, że jeśli iloraz q spełnia nierówność $|q| < 1$, to suma wyrazów tego postępu równa jest $1/(1-q)$:

$$(1) \qquad \frac{1}{1-q} = 1+q+q^2+q^3+\ldots, \qquad |q| < 1.$$

Suma po prawej stronie ma nieskończenie wiele składników; jest to przykład szeregu nieskończonego.

Spójrzmy na wyrażenie po lewej stronie nie jak na stałą wartość, ale jak na funkcję zmiennej q, przebiegającej przedział $-1 < q < 1$. Składniki szeregu po prawej stronie są funkcjami potęgowymi, o coraz większych wykładnikach naturalnych. Szereg tego typu nazywamy szeregiem *potęgowym*.

Liczbę s nazywamy sumą szeregu $\sum a_n$: $s = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ jeśli ciąg sum częściowych:

$s_1 = a_1$

$s_2 = a_1 + a_2$

....

$s_n = a_1 + \ldots + a_n$

....

jest zbieżny do s. Szereg jest zbieżny, jeśli ma sumę (skończoną).

Wzór (1) daje więc nam przedstawienie funkcji $1/(1-q)$ w postaci sumy szeregu potęgowego. Mówimy, że funkcja ta *rozwija się* w przedziale $(-1, 1)$ w szereg potęgowy $1+q+q^2+q^3 \ldots$. Podstawmy $q = -x^2$. Dostajemy

$$\frac{1}{1+x^2} = 1-x^2+x^4-x^6+\ldots, \quad |x| < 1. \tag{2}$$

Otrzymaliśmy rozwinięcie w szereg potęgowy funkcji $1/(1+x^2)$, oczywiście także w przedziale $(-1,1)$. A funkcja ta — to nic innego, niż pochodna funkcji *arcus tangens*. Całkując równość (2) dostajemy zatem

$$\operatorname{arc\,tg} x = x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\ldots, \quad |x| \leqslant 1. \tag{3}$$

Jest to rozwinięcie funkcji $\operatorname{arc\,tg} x$. Dlaczego napisaliśmy słabą nierówność: $|x| \leqslant 1$? Wkrótce się wyjaśni.

Funkcja F nazywa się *funkcją pierwotną* funkcji f, jeśli f jest pochodną F. Dla funkcji x^k pierwotna ma postać

$$\frac{1}{k+1}x^{k+1}+C.$$

Przy całkowaniu może się pojawić dodatkowy składnik — tzw. stała całkowania (jeśli F jest funkcją pierwotną funkcji f, to również każda funkcja postaci $F+C$, gdzie C jest dowolną stałą, także jest funkcją pierwotną f). Sprawdzamy jednak, że w punkcie $x = 0$ obie strony wzoru (3) przyjmują wartość 0, więc nie należy dodawać do prawej strony żadnej stałej.

Całkując sumę, wystarczy scałkować wszystkie składniki i wyniki zsumować. Jest to znana reguła dla sum skończonych. Czy jednak można tak postępować z sumami nieskończonymi? Odpowiedź ogólna brzmi: nie. Ale zaraz zastrzec trzeba, że istnieją różne dodatkowe założenia, przy których postępowanie takie jest prawidłowe. Szeregi potęgowe mają tę miłą własność, że w ich przypadku wspomniane założenia są zawsze spełnione. Tak więc wyprowadzenie wzoru (3) z (2) było poprawne — przynajmniej dla $|x| < 1$.

π liczbą algebraiczną?

Jednym z pierwiastków równania

$$11x^5-17x^4-42x^3-37x^2-27x+42 = 0$$

jest z dokładnością do 13 cyfr po przecinku 3,1415926535897.

Tożsamość (3) zachodzi zatem w przedziale $-1 < x < 1$. Ale, w odróżnieniu od szeregu we wzorze (2), szereg we wzorze (3) jest zbieżny również dla $x = \pm 1$. Z ogólnych własności szeregów potęgowych wynika, że w takim przypadku prawdziwość wzoru (3) przenosi się na te dwie dodatkowe wartości. A to właśnie jest nam potrzebne: podstawiając $x = 1$ i uwzględniając, że $\operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{1}{4}\pi$, otrzymujemy wzór

$$\frac{1}{4}\pi = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots \tag{4}$$

Wzór ten zawdzięczamy G. W. Leibnizowi (1646—1716). Stąd i nazwa: *wzór Leibniza*.

Jeśli teraz urwiemy sumowanie na dowolnym miejscu, czyli weźmiemy sumę częściową szeregu (4), to otrzymamy pewną liczbę wymierną, stanowiącą przybliżoną wartość liczby $\frac{1}{4}\pi$. Przybliżenie to jest, rzecz jasna, tym lepsze, im dalej urwiemy sumowanie. Możemy w ten sposób uzyskać przybliżenie z dowolną dokładnością. Tyle teoria. A praktyka? O tym za chwilę. Warto tymczasem zwrócić uwagę na niewątpliwe korzyści płynące z przedstawienia funkcji w postaci sum szeregów potęgowych. Korzyścią najbardziej chyba oczywistą — choć nie jedyną — jest możliwość znajdowania przybliżonych wartości rozpatrywanych funkcji w dowolnych punktach danego przedziału. Do wyznaczenia π użyliśmy wzoru (3), kładąc $x = 1$. Ale podstawiając za x dowolną liczbę z przedziału $\langle -1, 1 \rangle$ możemy w ten sam sposób wyznaczyć wartość $\operatorname{arc\,tg} x$ z zadaną z góry dokładnością. Wykorzystując rozwinięcia potęgowe można sporządzić tablice wartości rozmaitych funkcji.

Są tu jednak kłopoty. Okazuje się, że nie każda funkcja — nawet bardzo regularna — daje się rozwinąć w szereg potęgowy. A jeśli nawet się daje — trzeba umieć to rozwinięcie znaleźć! Nie zawsze jest to łatwe... Istnieją bardzo liczne metody rozwijania w szeregi potęgowe. Opis tych metod, wraz z wykładem teorii tych szeregów, a także ze wzorami przedstawiającymi rozwinięcia konkretnych funkcji (np. logarytm, sinus, cosinus), można znaleźć w każdym podręczniku analizy matematycznej.

Jeżeli p_n jest długością obwodu wielokąta foremnego o n bokach wpisanego w koło o średnicy 1, to oczywiście $\lim p_n = \pi$. Zbieżność ta nie jest jednak szybka, np. dla $n = 6 \cdot 2^{24}$ otrzymamy $p_n = 3{,}1415926535902\ldots$, a $\pi = 3{,}1415926535898\ldots$ Znacznie jednak szybciej do granicy π dąży ciąg

$$p'_n = p_n + \frac{1}{2^2-1}(p_n - p_{n/2});$$

jeszcze szybciej ciąg

$$p''_n = p'_n + \frac{1}{2^4-1}(p'_n - p'_{n/2}),$$

a jeszcze szybsza jest zbieżność dla

$$p'''_n = p''_n + \frac{1}{2^6-1}(p''_n - p''_{n/2}), \quad \text{itd.}$$

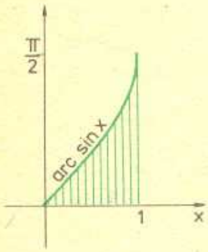
Dokładność przybliżenia $\pi = p^{m}_n$ (m przecinków na górze) jest rzędu n^{-2m}. Dla 24-kąta już p'''_{24} daje 8 prawidłowych cyfr po przecinku. Ta metoda pozwala obliczać π rzeczywiście szybko, łatwo i przyjemnie.

Wróćmy do wzoru 4 i spróbujmy wyznaczyć przybliżoną wartość liczby π. Już zsumowanie pierwszych siedmiu składników doprowadza do dzielenia liczb sześciocyfrowych, jeśli chcemy wynik dostać w postaci dziesiętnej. A wynik ten to (pi razy oko) liczba 3,284... Daleko do celu! Kartka papieru i ołówek okazuje się być wyposażeniem niewystarczającym. Bierzemy kalkulator kieszonkowy do obliczania kolejnych odwrotności. Po stu działaniach jeszcze nie mamy ustalonej... drugiej cyfry po przecinku. Nic w tym dziwnego: oznaczmy przez s_n sumę n początkowych składników naszego szeregu. Widzimy, że ciąg wartości $s_1, s_2, s_3, \ldots$ oscyluje wokół liczby $\frac{1}{4}\pi$, przy czym

$$|s_{n+1}-s_n| = \frac{1}{2n+1}.$$

Znaczy to, że z dwóch kolejnych wartości przybliżonych s_n, s_{n+1} co najmniej jedna daje błąd większy niż $\frac{1}{4n+2}$. A jeszcze trzeba ten błąd pomnożyć przez 4 $\left(\text{bo przecież interesuje nas liczba } \pi\text{, a nie } \frac{1}{4}\pi\right)$. Więc nie tędy droga do obliczenia π; lub raczej wiedzie tędy droga, ale bardzo żmudna, niewiele skuteczniejsza, niż rzucanie patyczkiem na poliniowaną płaszczyznę. Po prostu: szereg (4) okazuje się być bardzo powoli zbieżny.
Więc może by spróbować z funkcją arcus sinus? Procedura jest zasadniczo ta sama, co w przypadku funkcji arcus tangens. Najpierw znajduje się rozwinięcie pochodnej $1/\sqrt{1-x^2}$, potem się całkuje. Wyprowadzenie jest jednak bardziej skomplikowane niż poprzednio, również wynik mniej zachęcający:

$$\text{(5)} \qquad \arcsin x = x + \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7 + \ldots, \qquad |x| \leqslant 1.$$

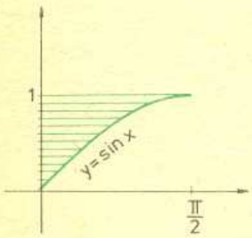


Po podstawieniu $x = 1$:

$$\frac{1}{2}\pi = 1 + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \ldots.$$

Ten szereg nie jest wcale zbieżny szybciej niż szereg (4). W połączeniu ze skomplikowaną postacią jego składników powoduje to, że do naszego celu jest on jeszcze mniej dogodny.
Interesujące jest natomiast samo przedstawienie funkcji arcus sinus w formie sumy szeregu potęgowego (5).
Gdy już mowa o funkcji arcus sinus, nadmieniamy tu, że w metodzie doświadczalno-probabilistycznej, opisanej na początku, wspomniana wartość prawdopodobieństwa $1-2/\pi$ jest wynikiem obliczenia całki

$$\frac{2}{\pi}\int_0^1 \arcsin x \, dx.$$



Czytelnicy znający trochę technikę całkowania mogą bez trudu sprawdzić, że całka ta istotnie równa jest $1-2/\pi$. Wszystkim natomiast proponujemy zastanowienie się, dlaczego badane prawdopodobieństwo wyraża się taką właśnie całką. A za miesiąc pokażemy różne inne ładne wzory, w których występuje magiczna liczba π.

Zadania

Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

M 226. Uzasadnić następujący sposób poprawiania przybliżonej wartości x pierwiastka kwadratowego z liczby a większej od jedności:

$$x' = x + \Delta/2 - \Delta^2/8x, \qquad \text{gdzie } \Delta = \frac{a}{x} - x = \frac{a-x^2}{x}$$

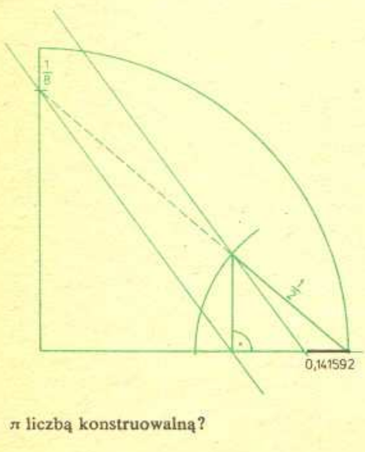
Rozwiązanie na str. 16.

M 227. Siatkę linii równoległych o stałych odstępach a nałożono na krzywą na płaszczyźnie i policzono liczbę przecięć krzywej z prostymi siatki. Operację powtórzono sześciokrotnie, obracając siatkę za każdym razem o 30°. Wykazać, że łączna liczba przecięć jest w przybliżeniu proporcjonalna do długości krzywej i znaleźć współczynnik proporcjonalności.
Rozwiązanie na str. 16

M 228. Na prostokąt $ABCD$ nakładamy siatkę hiperbol równoosiowych $xy = n$ tak, aby jego boki AB i AC padły na asymptoty (osie x i y).
Jak wykorzystać ten „przyrząd" do mierzenia pola trójkąta?
Rozwiązanie na str. 6

Redaguje doc. dr Michał ŚWIĘCKI

F 77. Dwie równoległe płyty zanurzono pionowo do połowy
(a) w cieczy zwilżającej materiał obu płyt,
(b) w cieczy nie zwilżającej żadnej z płyt oraz
(c) w cieczy zwilżającej jedną i nie zwilżającej drugiej płyty.
Jaki będzie kierunek sił działających między płytami w każdej z opisanych sytuacji?
Rozwiązanie na str. 7.



π liczbą konstruowalną?