Autor artykułu jest uczniem II klasy liceum w Końskich.

O własnościach wyrażenia $x_1^p+x_2^p+\dots+x_n^p$

Jarosław CEL

§1. O równaniu $x_1^p+x_2^p+\ \dots\ +x_n^p = y^p$

Twierdzenie 1. Przy ustalonych $x_i > 0$ oraz y równanie $\sum_{1=i}^{n} x_i^p = y^p$ jest spełnione dla co najwyżej jednego wykładnika p.

Dowód: Niech dla pewnego wykładnika p będzie $\sum_{i=1}^{n} x_i^p = y^p$. Wystarczy udowodnić, że przy $q \neq p$ mamy $\sum_{i=1}^{n} x_i^q \neq y^q$. Gdy $q < p$, to wobec $y > x_i$ mamy $y^{q-p} < x_i^{q-p}$, czyli

$$y^q = y^{q-p}y^p = y^{q-p}\sum_{i=1}^{n} x_i^p = \sum_{i=1}^{n} x_i^p y^{q-p} < \sum_{i=1}^{n} x_i^p x_i^{q-p} = \sum_{i=1}^{n} x_i^q,$$

natomiast jeżeli $q > p$, to postępując analogicznie dowodzimy, że $\sum_{i=1}^{n} x_i^q < y^q$.

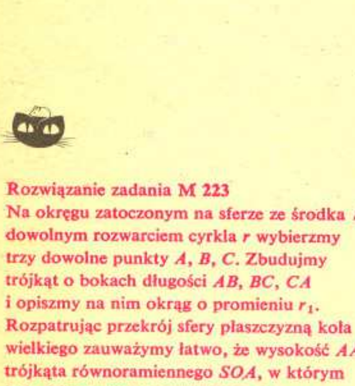
Co do równania $\sum_{i=1}^{n} x_i^p = y^p$ Euler wypowiedział w 1778 roku przypuszczenie, że nie ma ono rozwiązań naturalnych, jeżeli tylko $2 \leqslant n < p$. Obalono je jednak po 188 latach, zachodzi bowiem równość $27^5+84^5+110^5+133^5 = 144^5$.

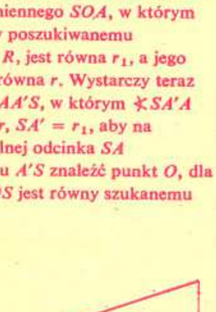
Twierdzenie 2. Dla każdego wykładnika p równanie $\sum_{i=1}^{n} x_i^p = y^p$ ma rozwiązanie w liczbach całkowitych dodatnich, jeżeli tylko n jest dostatecznie duże.

Dowód. Jeżeli $n = k^p$, to możemy przyjąć $x_i = k(i = 1, 2, \dots, n)$, $y = k^2$ i, jak łatwo widzieć, wówczas równanie jest spełnione. Niech ε będzie pewną liczbą naturalną i niech liczby $S_i(i = 1, 2, \dots, n)$, t spełniają równanie dla danej liczby naturalnej n. Jest więc $\sum_{i=1}^{n} S_i^p = t^p$, więc dla $x_i = S_i\ (i = 1, 2, \dots, n)$, $x_j = t(j = n+1, n+2, \dots, n+\varepsilon^p-1)$ będzie $\sum_{i=1}^{n+\varepsilon^p-1} x_i^p = (\varepsilon t)^p$.
Wynika stąd, że skoro równanie nasze ma rozwiązanie w liczbach naturalnych dla liczby n, to ma je także dla liczby $n+\varepsilon^p-1$, więc i dla $n+\varepsilon^p-1+\varepsilon^p-1$ itd. dla liczby $n+(\varepsilon^p-1)l$, gdzie l jest dowolną liczbą naturalną. Rozważane równanie ma, jak wiadomo, rozwiązanie przy $n = k^p$, toteż biorąc najpierw $\varepsilon = k^p$, a potem $\varepsilon = k^p-1$ (dlaczego, zaraz się okaże) wnosimy, że rozwiązanie takie istnieje dla każdej liczby n postaci $n = k^p+(k^p-1)u+[(k^p-1)p-1]v$, gdzie u i v są naturalne. Jak nietrudno stwierdzić, liczby k^p-1 oraz $(k^p-1)^p-1$ są względnie pierwsze, toteż na podstawie wniosku 1 ze str. 12 „Teorii liczb", cz. II, W. Sierpińskiego możemy napisać, że każda dostatecznie wielka liczba naturalna jest postaci $(k^p-1)u+[(k^p-1)^p-1]v$, a zatem i postaci $n = k^p+(k^p-1)u+[(k^p-1)^p-1]v$, a dla takiej liczby rozważane równanie ma rozwiązanie.

Odbiegnijmy na chwilę od tematu i rozważmy równanie $\sum_{i=1}^{n} p^{x_i} = p^y$, które powstaje z równania $\sum_{i=1}^{n} x_i^p = y^p$ przez odwrócenie roli wykładników i podstaw. Rozwiążemy je w liczbach naturalnych. Załóżmy, że $x_i \leqslant x_{i+1} < y$, oczywiście $p \geqslant 2$.
Mamy $1+\sum_{i=2}^{n} p^{x_i-x_1} = p^{y-x_1}$, musi być zatem $x_2 = x_1$, co daje $2+\sum_{i=3}^{n} p^{x_i-x_1} = p^{y-x_1}$.
Gdy $p = 2$, to $1+\sum_{i=3}^{n} 2^{x_i-x_1-1} = 2^{y-x_1-1}$, skąd $n = 2^t+1$, $t \in N$, $x_i-x_1-1 = 0$ $(i = 3, 4, \dots, n)$, $y = t+x_1+1$, przy $n = 2^t+1$, $t \in N$. Niech dalej będzie $p = 3$. Rozumując jak wyżej dostajemy $1+\sum_{i=4}^{n} 3^{x_i-x_1-1} = 3^{y-x_1-1}$, łatwo zauważyć, że $x_i-x_1-1 = 0$ $(i = 4, 5, \dots, n)$ i $n = 3^t+2$, $t \in N$, toteż rozwiązaniami w tym wypadku są $p = 3$, $x_3 = x_2 = x_1$ $x_i = x_1+1(i = 4, 5, \dots, n)$, $y = t+x_1+1$, przy $n = 3^t+2$, $t \in N$.

Rozwiązanie zadania M 223
Na okręgu zatoczonym na sferze ze środka S dowolnym rozwarciem cyrkla r wybierzmy trzy dowolne punkty A, B, C. Zbudujmy trójkąt o bokach długości AB, BC, CA i opiszmy na nim okrąg o promieniu r_1. Rozpatrując przekrój sfery płaszczyzną koła wielkiego zauważymy łatwo, że wysokość AA' trójkąta równoramiennego SOA, w którym bok OS jest równy poszukiwanemu promieniowi sfery R, jest równa r_1, a jego podstawa AS jest równa r. Wystarczy teraz zbudować trójkąt $AA'S$, w którym $\sphericalangle SA'A$ jest prosty, $SA = r$, $SA' = r_1$, aby na przecięciu symetralnej odcinka SA i przedłużenia boku $A'S$ znaleźć punkt O, dla którego odcinek OS jest równy szukanemu promieniowi.





Przechodzimy teraz do ogólnego rozwiązania, sprowadzając rozważane równanie do postaci $1+\sum_{i=p+1}^{n} p^{x_i-x_1-1} = p^{y-x_1-1}$, gdzie $p \leqslant n$, skąd $x_i = x_1$ dla $i = 2, 3, \ldots, p$; $x_i = x_1+1$ dla $i = p+1, p+2, \ldots, n$; $y = t+x_1+1$ przy $n = p^t+p-1$, $t \in N$. Warunkiem rozwiązania jest spełnienie równości $p^t+p = n+1$, $p, n = 1, 2, \ldots$, $t \in N$, wobec której, rzecz jasna, $p|n+1$.

Na zakończenie przeglądu różnych własności równania $\sum_{i=1}^{n} x_i^p = y_i^p$ zacytujemy **twierdzenie** A. Rotkiewicza:

Jeżeli $n > 2$ oraz $\sum_{i=1}^{n} x_i^p = y_i^p$, gdzie $x_1, \ldots, x_n, y$ są liczbami naturalnymi takimi, że $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, to $x_n > p$.

§ 2. Inne własności

Wyprowadzimy wzór Cavalieriego, tj. wzór

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}.$$

Uczynić to można posługując się całką $\int_0^1 x^p \,dx = \frac{1}{p+1}$.

Zastosujemy jednak inną metodę wykorzystując rozwiązane przez Jakuba Bernoulliego zagadnienie wyznaczenia sumy $S_p(n) = 1^p+2^p+\ldots+n^p$ zamieszczone w pracy „*Ars conjectandi*" wydanej w roku 1713, już po jego śmierci. Bernoulli dowiódł, że

$$S_p(n) = 1^p+2^p+\ldots+n^p = \frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{p}\binom{p+1}{k}B_k\cdot(n+1)^{p+1-k},$$

gdzie liczby B_k zwane dziś liczbami Bernoulliego są niezależne od p. Dalej można już stwierdzić, że

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_p(n)}{n^{p+1}} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{p}\frac{n^{-k}}{p+1}\binom{p+1}{k}\cdot B_k = \frac{1}{p+1} \qquad \text{c.b.d.o.}$$

Początkowe liczby Bernouliego to: $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_3 = 0$ i następne liczby o nieparzystych indeksach są równe zeru; natomiast $B_4 = \frac{1}{30}$, $B_6 = \frac{1}{42}$, $B_8 = -\frac{1}{30}$, $B_{10} = \frac{5}{66}$, $B_{12} = -\frac{691}{2730}$, $B_{14} = \frac{7}{6}$, $B_{16} = -\frac{3617}{510}$, ... $B_{28} = -\frac{23749461029}{870}$, ... Liczby Bernouliego mają duże znaczenie w teorii liczb, występują np. przy obliczaniu wartości słynnej funkcji „dzeta" Riemanna, a także w rozwinięciach kilku ważnych całek.

Twierdzenie 3. Gdy liczby naturalne x_i są większe niż 1, ciąg $\sum_{i=1}^{n} x_i^p (p = 1, 2, \ldots)$ zawiera nieskończenie wiele liczb złożonych.

Dowód. Obierzmy dowolną liczbę naturalną N. Wobec $x_i > 1$ istnieje takie naturalne p, że $q = \sum_{i=1}^{n} x_i^p > N$, czyli $q > x_i$. Załóżmy, że q jest liczbą pierwszą, oczywiście $q \times x_i$, więc z małego twierdzenia Fermata wynika, że $x_i^{q-1} \equiv 1 \pmod q$, skąd $x_i^{p+q-1} \equiv x_i^p \pmod q$, lecz $\sum_{i=1}^{n} x_i^p \equiv 0 \pmod q$, przeto po zsumowaniu kongruencji dostajemy $\sum_{i=1}^{n} x_i^{p+q-1} \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i^p \equiv 0 \pmod q$.

Ale z kolei $\sum_{i=1}^{n} x_i^{p+q-1} > \sum_{i=1}^{n} x_i^p$, bowiem dla $x_i > 1$, $q \geqslant 2$ mamy $x_i^{p+q-1} > x_i^p$. Wynika stąd, że liczba $\sum_{i=1}^{n} x_i^{p+q-1}$ jest złożona, gdy liczba $\sum_{i=1}^{n} x_i^p = q$ jest pierwsza, a zatem co najmniej jedna z liczb $\sum_{i=1}^{n} x_i^p$ oraz $\sum_{i=1}^{n} x_i^{p+q-1}$ większych od N jest złożona. Dowodzi to jednocześnie żądanej tezy, bowiem liczba N obrana była dowolnie.

Zapewne znacznie trudniejsze byłoby znalezienie warunków na liczby n, p takich, by istniało nieskończenie wiele liczb pierwszych $\sum_{i=1}^{n} x_i^p$, gdzie x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ są całkowite. Z pewnych twierdzeń Fermata, Gaussa oraz Lagrange'a wynika, iż istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych postaci $x_1^2+x_2^2$, $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$, gdzie x_1, x_2, x_3, x_4 są całkowite. W roku 1923 G. H. Hardy i J. E. Littlewood wyrazili przypuszczenie, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych postaci $x_1^3+x_2^3+x_3^3$, gdzie x_1, x_2, x_3 są całkowite.

Rozwiązanie zadania M 225

Jeżeli p jest liczbą pierwszą większą od 3, to reszta z dzielenia p przez 6 jest równa 1 lub 5. (Liczby postaci $6k$, $6k+2$, $6k+4$, są parzyste, a liczby postaci $6k+3$ są podzielne przez 3). Tak więc $p = 6k+1$ lub $p = 6k-1$ $(= 6l+5)$. Wobec tego $p^2 = (6k\pm1)^2 = 36k^2\pm12k+1 = 24\frac{k(3k\pm1)}{2}+1$. Wystarczy teraz zauważyć, że liczba $k(3k\pm1)$ jest, dla każdego k, parzysta.