Świat jest na tyle skomplikowany, że jeśli chcemy go opisywać, musimy koncentrować naszą uwagę na pewnych cechach, abstrahując od innych. A więc geometra abstrahuje od koloru przedmiotów, materiału z jakiego są zrobione i innych cech fizycznych, interesują go tylko własności geometryczne. Topologowie koncentrują się na pewnych wybranych własnościach geometrycznych (zwanych topologicznymi), traktują więc tak samo koło jak kwadrat, ale inaczej niż kulę 3-wymiarową lub zbiór 1-punktowy. Natomiast gałąź topologii zwana teorią homotopii zajmuje się jeszcze wyższą klasą niezmienników i w konsekwencji nie odróżnia kuli *n*-wymiarowej od zbioru jednopunktowego, czy też — mówiąc bardziej obrazowo i nieściśle — Jasia, od tegoż Jasia, któremu na nosie wyrósł długi włos. Jednakże metody, jakimi posługuje się teoria homotopii, pozwalają realizować te intuicje jedynie w zakresie dość prostych, regularnych obiektów, jak np. wielościany, Jasio.

Teoria kształtu — nowa, stworzona przez Karola Borsuka gałąź topologii — stawia sobie za cel przeniesienie, a raczej rozszerzenie idei teorii homotopii na znacznie szerszą klasę obiektów.

Czym zajmuje się teoria kształtu?

Dr Jerzy DYDAK

Dla lepszego zrozumienia niniejszego artykułu wskazane byłoby zapoznanie się z pracą Profesora Borsuka pt. „*Co to jest teoria rektraktów?*" (Delta 3/1979).

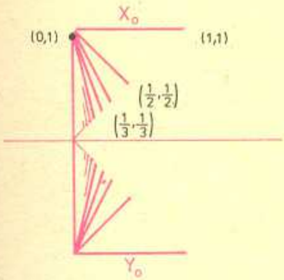
Przez I będziemy oznaczać odcinek domknięty $[0, 1]$, symbol $X \times I$ oznacza iloczyn kartezjański X przez I. Jest to przestrzeń, której punktami są pary (x, t), gdzie oczywiście $x \in X$, $t \in I$. Można ją sobie wyobrażać jako walec o podstawie X (jeżeli X jest kołem, to $X \times I$ jest „rzeczywiście" walcem). Wprowadzimy teraz bardzo ważne dla nas pojęcie ściągalności przestrzeni do punktu.

Definicja 1. Przestrzeń X nazywamy ściągalną do punktu $x_0 \in X$, jeżeli istnieje przekształcenie $F: X \times I \to X$, takie że

$$F(x, 0) = x \quad F(x, 1) = x_0,$$

przy wszelkich $x \in X$.

Można to sobie wyobrazić jako przekształcenie walca o podstawie X w tę samą przestrzeń X, przy czym na dolnej podstawie przekształcenie to jest tożsamością, zaś na górnej — każdy punkt przechodzi na x_0. Jeszcze inaczej, „dynamicznie" można to sobie przedstawiać jako ściskanie przestrzeni do jednego punktu x_0 w czasie od $t = 0$ do $t = 1$. Mówimy, że w tym przypadku przestrzeń X ma ten sam typ homotopii co przestrzeń jednopunktowa x_0, a przekształcenie tożsamościowe jest homotopijne z przekształceniem X w jeden punkt $x_0 \in X$. Ogólniej, dwie przestrzenie X, Y mają ten sam typ homotopii, jeżeli istnieją dwa przekształcenia $f: X \to Y$ i $g: Y \to X$ takie, że $g \cdot f$ jest homotopijne z przekształceniem identycznościowym id_X $(g \cdot f \simeq \simeq \mathrm{id}_X)$ oraz $f \cdot g \simeq \mathrm{id}_Y$.



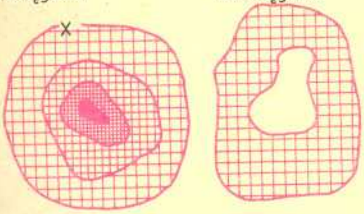
Przestrzeń Z

Jeżeli przestrzenie X i Y są ściągalne i mają tylko jeden punkt wspólny, to suma $X \cup Y$ „wygląda na" ściągalną. Najpierw możemy bowiem ściągnąć X do wspólnego punktu X i Y, a potem Y. Jednakże to wyobrażenie nie jest właściwe dla pewnych przestrzeni. Określmy na przykład X jako podzbiór płaszczyzny euklidesowej E^2 będący sumą odcinków łączących punkt $(0, 1)$ z punktami $(0, 0)$ i $(1/n, 1/n)$, $n = 1, 2, \ldots$. Wówczas suma $X \cup Y = Z$ nie jest ściągalna, gdzie Y jest symetrycznym obrazem X względem osi odciętych.

Wyrażając się nie całkiem ściśle, przestrzeń jest ściągalna, jeżeli można ją „w sposób ciągły ściągnąć" do jednego punktu (rys. poniżej).

przestrzeń ściągalna

przestrzeń nieściągalna



Opisany w tekście dowód nieściągalności przestrzeni Z można poglądowo streścić tak. Przy ewentualnym ściąganiu Z do jednego punktu, punkty leżące na ukośnych odcinkach musiałyby się poruszać wzdłuż tych właśnie odcinków — a zatem punkty z Y w dół, punkty z X do góry. A co z punktem $(0, 0)$? Ukośne odcinki podchodzą do niego dowolnie blisko. Ciągłość wymaga, by punkt $(0, 0)$ poszedł w tę samą stronę, w którą dostatecznie bliskie mu punkty. Ale jedne z nich idą w górę, drugie w dół; sprzeczność.

Rzeczywiście, załóżmy, że $H: Z \times I \to Z$ jest homotopią łączącą id_Z i przekształcenie stałe w punkt $(0, 1)$, tzn. $H(z, 0) = z$ i $H(z, 1) = (0, 1)$ dla każdego $z \in Z$. Istnieje wtedy taka liczba $0 < t_0 < 1$, że średnica zbioru $H(\{(0, 0)\} \times [0, t_0])$ jest mniejsza od 1 i $H((0, 0), t_0) \neq (0, 0)$. Zatem $H((0, 0), t_0) = (0, a)$ i możemy założyć, że $a > 0$ (jeżeli $a < 0$, to dowód jest analogiczny). Teraz dla dostatecznie dużego n średnica zbioru $H(\{(-1/n, -1/n)\} \times [0, t_0])$ jest mniejsza od 1 i odległość punktów $H((-1/n, -1/n), t_0)$ i $H((0, 0), t_0)$ jest mniejsza od $\min(a, 1-a)$. Zatem $H((-1/n, -1/n), t_0) = (0, b)$, gdzie $b > 0$. Tutaj natrafiamy na sprzeczność, gdyż każda droga łącząca $(-1/n, -1/n)$ z $(0, b)$ w Z w naszym przypadku $H(\{(-1/n, -1/n)\} \times [0, t_0])$ musi mieć średnicę większą od 1, jeżeli $b > 0$.

Tak więc Z i przestrzeń jednopunktowa nie mają tego samego typu homotopii, chociaż globalnie mają bardzo zbliżone własności, np. $E^2 - Z$ oraz $E^2 - \{(0, 0)\}$ są przestrzeniami homeomorficznymi. Zatem teoria homotopii jest niewystarczająca już przy badaniu wszystkich podzbiorów płaszczyzny, gdyż rozróżnia przestrzenie $\{(0, 0)\}$ i Z, a intuicyjnie chciałoby się uważać obie przestrzenie za równoważne.

Jedyną przeszkodą do ściągalności Z stanowiły jej złe lokalne własności w punkcie $(0, 0)$. Natomiast jeżeli wyjdziemy chociaż trochę poza przestrzeń Z, to obecność „pechowego" punktu $(0, 0)$ w tej przestrzeni przestanie być odczuwana. Mam tutaj na myśli następujący fakt:

Przestrzeń Z jest ściągalna w każdym zbiorze otwartym U płaszczyzny E^2, który ją zawiera.

Jest on oczywiście prawdziwy, bowiem dla każdego otoczenia U przestrzeni Z w E istnieje liczba naturalna $n > 0$ taka, że prostokąt $B = [-1/n, 1/n] \times [-1, 1]$ jest zawarty w U. Teraz przestrzeń będąca sumą $B \cup Z$ jest ściągalna w sobie, a zatem Z jest ściągalna w U.

Odsyłamy tu Czytelnika do artykułu Profesora Borsuka; na płaszczyźnie retrakty absolutne są zbiorami domkniętymi, ograniczonymi i ściągalnymi.

To co zrobiliśmy tutaj, polegało na zastąpieniu odwzorowań przestrzeni Z przez przekształcenie pewnych otoczeń tej przestrzeni. To „zneutralizowało" jak gdyby wpływ niedobrego punktu $(0, 0)$. Okazuje się, że sensowne jest przyjąć, by te otoczenia były retraktami absolutnymi.
Mam nadzieję, że na powyższym przykładzie Czytelnik zrozumie sens wprowadzenia następujących definicji:

Niech X, Y i Z będą kompaktami, a M, N i P retraktami absolutnymi zawierającymi X, Y i Z odpowiednio.

Definicja 2. Ciąg podstawowy z (X, M) do (Y, N) to ciąg przekształceń $\{f_n : M \to N\}_{n=1}^{\infty}$ spełniający następujący warunek: dla każdego otoczenia V przestrzeni Y w N istnieje otoczenie U przestrzeni X w M i liczba naturalna $k \geqslant 1$ takie, że dla dowolnego $n \geqslant k$ przekształcenia $f_n|U$ i $f_{n+1}|U$ są homotopijne w V, tzn. istnieje przekształcenie $H: U \times [0, 1] \to V$, dla którego $H(x, 0) = f_n(x)$ i $H(x, 1) = f_{n+1}(x)$ dla każdego $x \in U$.

Definicja 3. Niech $\mathbf{f} = \{f_n : M \to N\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem podstawowym z (X, M) do (Y, N), a $\mathbf{g} = \{g_n : N \to P\}_{n=1}^{\infty}$ ciągiem podstawowym z (Y, N) do (Z, P). Złożeniem $\mathbf{g} \cdot \mathbf{f}$ ciągów $\mathbf{f}$ i $\mathbf{g}$ nazywamy ciąg $\mathbf{h} = \{g_n f_n : M \to P\}_{n=1}^{\infty}$.

Uwaga. Przy definicji 3 należy sprawdzić, że ciąg $\{g_n f_n : M \to P\}_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem podstawowym.

Definicja 4. Ciągiem identycznościowym $\mathbf{id}_{(X, M)}$ nazywamy ciąg podstawowy $\{id_M : M \to M\}_{n=1}^{\infty}$, złożony z przekształceń tożsamościowych.

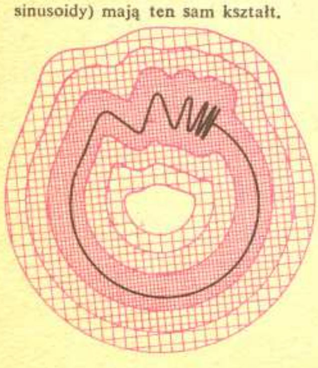
Definicja 5. Dwa ciągi podstawowe $\{f_n : M \to N\}_{n=1}^{\infty}$ i $\{f'_n : M \to N\}_{n=1}^{\infty}$ z (X, M) do (Y, N) są homotopijne, jeżeli dla każdego otoczenia V przestrzeni Y w N istnieje otoczenie U przestrzeni X w M i liczba naturalna $k \geqslant 1$ taka, że dla dowolnego $n \geqslant k$ przekształcenia $f_n|U$ i $f'_n|U$ są homotopijne w V.

Definicja 6. Dwie przestrzenie X i Y mają ten sam kształt jeżeli istnieją: retrakty absolutne M i N zawierające X i Y odpowiednio, ciągi podstawowe $\mathbf{f}$ z (X, M) do (Y, N) i $\mathbf{g}$ z (Y, N) do (X, M) takie, że $\mathbf{g} \cdot \mathbf{f}$ jest homotopijne z $\mathbf{id}_{(X, M)}$ i $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}$ jest homotopijne z $\mathbf{id}_{(Y, N)}$.

Jako test na zrozumienie powyższych definicji proponuję przekonać się, że opisana na wstępie przestrzeń Z ma kształt przestrzeni jednopunktowej.

Można wykazać, że przestrzenie M i N występujące w Definicji 6 są nieistotne w tym sensie, że jeśli zachodzą warunki wymienione w Definicji 6 dla pewnych przestrzeni M i N, to są one spełnione dla każdej pary retraktów absolutnych M' i N' zawierających X i Y odpowiednio. Także można pokazać, że przestrzenie o tym samym typie homotopii mają ten sam kształt, a fakt odwrotny jest prawdziwy dla absolutnych retraktów otoczeniowych.

Okrąg (wiadomo co) i okrąg warszawski (taki kawałek zamknięty zagęszczającej się sinusoidy) mają ten sam kształt.



Teraz możemy określić czym zajmuje się teoria kształtu. Jest to badanie niezmienników kształtu, tzn. takich własności przestrzeni, które zachowują się, gdy zastąpimy ją przez dowolną przestrzeń o tym samym kształcie.

Jako kolejne ćwiczenie proponuję Czytelnikowi przekonać się, że spójność jest niezmiennikiem kształtu, a także zastanowić się, które ze znanych niezmienników topologicznych są także niezmiennikami w teorii kształtu.

Jednym z ciekawszych niezmienników kształtu jest punktowa 1-przesuwalność.

Definicja 7. Continuum X nazywamy punktowo 1-przesuwalnym, jeżeli dla punktu $x_0 \in X$ i każdego otoczenia U przestrzeni X w $M \in \mathbf{AR}$ istnieje otoczenie W przestrzeni X w M spełniające następujący warunek:
dla każdego otoczenia V przestrzeni X w M i każdego przekształcenia $f\colon (S^1, a) \to (W, x_0)$, gdzie S^1 jest okręgiem i a dowolnym punktem okręgu, istnieje przekształcenie $H\colon S^1 \times [0, 1] \to U$, dla którego $H(x, 0) = f(x)$ dla $x \in S^1$, $H(a, t) = f(a)$ dla $0 \leqslant t \leqslant 1$ i $H(S^1 \times \{1\}) \subset V$.

Okazuje się, że wszystkie continua łukowo spójne, a także podcontinua rozmaitości dwuwymiarowych są punktowo 1-przesuwalne. Jednym z najważniejszych wyników dotyczących tego pojęcia jest

Twierdzenie 8 [*J. Krasinkiewicz*]: Każde continuum punktowo 1-przesuwalne X ma kształt pewnego continuum lokalnie spójnego.

Tak więc klasa continuów mających kształt continuów lokalnie spójnych posiada prostą charakteryzację wyrażoną warunkiem występującym w Definicji 7.

Standardowym przykładem continuum nie będącego punktowo 1-przesuwalnym jest solenoid diadyczny D, który można sobie wyobrazić jako przecięcie takiego nieskończonego ciągu zstępującego pierścieni do gry ringo $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$, że P_{n+1} jest dwukrotnie nawinięty we wnętrzu P_n. Solenoid diadyczny często występuje w różnych działach matematyki.
Ponieważ podcontinua płaszczyzny są punktowo 1-przesuwalne, więc jako wniosek otrzymujemy, że solenoid diadyczny nie jest zanurzalny w płaszczyznę (tzn. płaszczyzna nie zawiera zbioru homeomorficznego z solenoidem diadycznym).

Zachodzi nawet mocniejszy rezultat: Iloczyn kartezjański solenoidu diadycznego i odcinka jednostkowego nie jest zanurzalny w E^3.

Został on uzyskany przez D. R. McMillana przy użyciu następującego twierdzenia.

Twierdzenie 9 [*J. Krasinkiewicz — D. R. McMillan*]. Niech $f\colon X \to Y$ będzie ciągłym odwzorowaniem continuum punktowo 1-przesuwalnego X na Y. Wtedy przestrzeń Y jest punktowo 1-przesuwalna.

Przed pracą McMillana wiedziano jedynie, że stożek nad solenoidem diadycznym nie jest zanurzalny w E^3 i w dowodzie istotnie korzystano z własności wierzchołka tego stożka.

Mam nadzieję, że na przykładzie punktowej 1-przesuwalności można było zobaczyć jak wygląda w praktyce rozwiązywanie głównego problemu teorii kształtu:

> Podać warunki na to, by dana przestrzeń miała kształt przestrzeni o dobrych własnościach lokalnych.

Uwagi końcowe. Teoria kształtu jest dziedziną młodą i wciąż rozwijającą się. Została zapoczątkowana przez Profesora Borsuka pracą „*Concerning homotopy properties of compacta*" opublikowaną w 1968 roku w Fundamenta Mathematicae. Zyskała szczególny rozgłos po odkryciu przez T. A. Chapmana w 1972 roku głębokiego związku między kształtem przestrzeni położonych w pseudownętrzu s kostki Hilberta Q^∞ (s jest zbiorem punktów $(x_1\ x_2, \ldots) \in Q^\infty$ takich, że $0 < x_k < 1/k$, $k = 1, 2, \ldots$) a typem topologicznym ich dopełnień w Q^∞. Udowodnił on mianowicie, że dwa kompakta X i Y w s mają ten sam kształt wtedy i tylko wtedy, gdy $Q^\infty - X$ i $Q^\infty - Y$ są homeomorficzne. Do zainteresowania się teorią kształtu przyczyniło się także sformułowanie i udowodnienie przez M. Moszyńską w 1973 roku odpowiednika twierdzenia Whiteheada.

Istnieje już dość obszerna literatura (przeszło 400 prac) poświęcona teorii kształtu i jej zastosowaniom do innych działów topologii, w której pokaźny udział mają Profesor Borsuk i jego uczniowie. Ponadto istnieją dwa opracowania monograficzne:
Karol Borsuk, *Theory of shape*, Monografie Matematyczne 59, Warszawa 1975,
oraz
Jerzy Dydak i Jack Segal, *Shape theory: An introduction*, Lecture Notes in Math. 688, Springer 1978.

Rozwiązanie zadania F 76.
Niech w czasie t masa kropli wynosi m, a jej promień r. W czasie Δt objętość kropli wzrośnie o $4\pi r^2 \Delta r$ z dokładnością do członów rzędu $(\Delta r)^2$, gdzie Δr jest przyrostem promienia kropli. Zatem przyrost masy kropli wyniesie $\Delta m = 4\pi r^2 \Delta r$ (gęstość wody wynosi 1). Zgodnie ze wskazówką mamy

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = 4\pi r^2 \frac{\Delta r}{\Delta t} \sim 4\pi r^2, \text{ skąd } \frac{\Delta r}{\Delta t} = \text{const.}$$

Stąd wynika, że $r = Kt$, gdzie K jest pewnym współczynnikiem. Przyjęliśmy, że $r = 0$ oraz $v = 0$ dla $t = 0$. Zgodnie z drugą zasadą dynamiki

$$\frac{dp}{dt} = mg,$$

gdzie $p = mv$. Ponieważ $m = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi K^3 t^3$, więc równanie powyższe można zapisać w postaci

$$\frac{d}{dt}(t^3 v) = g t^3,$$

skąd
po scałkowaniu (różniczkować nie należy, gdyż v zależy od t) otrzymujemy
$t^3 v = \frac{1}{4} g t^4$ i ostatecznie $v = \frac{1}{4} g t$.
Kropla spada z przyspieszeniem jednostajnym równym czwartej części przyspieszenia ziemskiego. Kropla taka jest „antyrakietą"; zamiast tracić — zyskuje podczas ruchu masę.