O małym wzorze wielkiego Eulera czyli osiem dociekań matematyczno-technicznych

Dr Włodzimierz KRZYŻANIAK

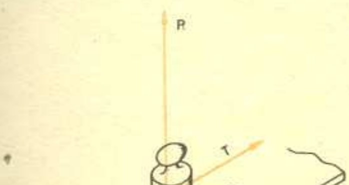
Horyzonty Techniki 12 (64)/1959

Redakcja Delty uważa, że ci z naszych Czytelników, którzy akurat uczą się rachunku różniczkowego, nie powinni iść spać dopóki nie zrozumieją każdej linijki zamieszczonego obok artykułu (a przynajmniej każdej linijki matematycznej treści). Autor tłumaczy bowiem w znakomity sposób jak posługiwać się rachunkiem ,,nieskończenie małych wielkości". To nie to co dzisiejsze podręczniki ...

Młodociany entuzjasta techniki Przemko był podczas przechadzki świadkiem następującej, na szczęście niegroźnej sceny i wprost niepojętego dla niego epilogu. Wypadek ten został przedstawiony przez rysownika ,,Horyzontów Techniki" w winiecie naszego artykułu. Przy wykopie fundamentów pracowała potężna koparka. Wykop sięgał już chyba kilkunastu metrów głębokości, koparka wyrywała z dna za jednym zamachem kilkaset kilogramów gruzu i ziemi, napełniała nimi w kilka chwil, za pomocą długiej wysięgnicy, podjeżdżający samochód ciężarowy — wywrotkę. Sznur dalszych samochodów czekał na swą kolej. W pewnej chwili jeden z samochodów ,,usiadł" ciężko od zwalonego na niego ładunku, kierowca włączył bieg, by odjeżdżać, gdy nagle, mimo rozpaczliwych wysiłków kierowcy, przy ogłuszającym ryku silnika, samochód — potężna masa metalu i ziemi z gruzem — poczęła zsuwać się po pochyłości. Najwidoczniej stanął on poprzednio zbytnio na stoku i silnik nie mógł już podołać sile ciężkości. Świadkowie wypadku wydali okrzyk przerażenia. Obsłudze groziło niebezpieczeństwo, samochodowi i koparce nieuchronne zderzenie i rozbicie. Na szczęście staczający się samochód zaczepił tylnym kołem o leżący wielki kamień i — stanął na połowie pochyłości. Widzowie odetchnęli z ulgą, ale tylko na chwilę, bo cóż dalej? Próbować podjechać pod stok z tej pozycji byłoby wielką lekkomyślnością, zostawić samochód w tym położeniu niepodobieństwem.
Wtem pewien robotnik, o skroniach już przyprószonych siwizną, ale o energicznym wyrazie twarzy, dobiega do maski samochodu, przywiązuje tam porwaną skądś na prędce konopną linę, a drugi jej koniec błyskawicznie owija kilka razy naokoło mocnego drewnianego pala, wbitego na skraju pochyłości. Pada jego śmiała komenda: — Odwalić kamień spod koła.
Widzowie zmartwieli Zdawało się, że szaleniec trzymający teraz na nieuwiązanej linie cały ciężar samochodu, zostanie niechybnie rozerwany na strzępy. Tymczasem, lekko tylko popuszczając linę trzymaną ciągle w jednej ręce, robotnik pozwolił samochodowi powolutku zjechać na dno wykopu...
,,Cóż za siłacz. Jedną ręką utrzymał samochód z ładunkiem!". Zachwyt widzów był nieopisany. Wydarzenie to stało się po powrocie ze spaceru przedmiotem dociekliwych pytań Przemka. Dorośli tłumaczyli ,,nadludzką siłę" robotnika po prostu działaniem tarcia (w czym mieli rację), ale tu chodziło o ścisłe matematyczno-fizyczne objaśnienie zjawiska. Ot choćby, czy można obliczyć, kiedy takie przeciwdziałanie siłą mięśni potężnemu naciągowi na drugi koniec nieuwiązanej, a tylko nawiniętej na pal liny byłoby ryzykowane, czy w ogóle takie ,,rzeczy" można obliczyć, a wreszcie, jaką rzeczywiście siłą zapobiegł katastrofie ów przytomny i doświadczony robotnik...
Otóż i tok myśli.

Myśl pierwsza

Naszemu ,,siłaczowi" pomagało na pewno tarcie konopnej liny o drewniany pal. Ba, ale cóż to właściwie jest tarcie? Spójrzmy na rysunek 1. Metalowy przedmiot o ciężarze 1 kg ma przesunąć po płaszczyźnie drewnianego stołu jakaś siła s. Uzyskujemy ją przez obciążenie sznurka przywiązanego do przedmiotu, odpowiednio dobranym ciężarkiem próbnym. Obciążany doświadczalnie koniec sznurka zwisa, przerzucony przez krążek. Zawieszamy ciężarek próbny 100 g, 200 g, 300 g, a przedmiot ,,ani drganie". Zniecierpliwieni zawieszamy więc kolejno 400 g, a potem 500 g — ciągle nic się nie dzieje...
Jak to nic się nie dzieje! Przecież najwidoczniej działa siła s próbnego ciężarka. Najwidoczniej nic się na razie nie dzieje, bo tej sile przeciwdziała jakaś inna zagadkowa siła, która musi być równa co do wielkości sile s, tylko zwrócona ,,w tył" (ściśle: skierowana przeciwnie). Tę przeciwsiłę występującą przy przesuwaniu naszego przedmiotu na płaszczyźnie nazywają fizycy właśnie tarciem (ściślej: siłą tarcia T). Tak więc święci tu triumf znakomita III zasada Newtona: ,,każdemu działaniu towarzyszy zawsze przeciwdziałanie, równe mu co do wielkości, ale przeciwnie skierowane".



Rys. 1

* Można się przekonać praktycznie (i udowodnić teoretycznie), że wielkość trących się w poślizgu powierzchni nie ma znaczenia.

** tak samo można się przekonać, że współczynnik tarcia μ jest znacznie mniejszy, gdy poślizg już trwa, niż gdy dopiero się zaczyna.

Nawiasem mówiąc, podobnie ma się rzecz z naciskiem N (rys. 1) wywieranym przez przedmiot na stół. Przeciwdziała mu reakcja R sprężystości stołu. Gdyby nie działała reakcja R, przedmiot pod działaniem N przebiłby stół, gdyby zaś nagle ustało działanie nacisku N, przedmiot zostałby podrzucony w górę reakcją sprężystości stołu...
Ale wróćmy do doświadczenia. Zniecierpliwieni już na dobre zawieszamy próbny ciężarek 600 g, który jest siłą s, mającą wbrew działaniu tarcia T wywołać poślizg przedmiotu. Nareszcie zaczyna się poślizg! Dopiero siła s = 600 g wywołuje poślizg. Stosunek: $\frac{s}{N} = \frac{600}{1000} = 0{,}6$
zapisujemy na kartce. Wymieniając teraz przedmiot poprzedni na inny, cięższy, np. 5 kg, a więc wywierający nacisk $N = 5000$ g, łatwo przekonalibyśmy się, że dopiero ciężarek próbny $s = 3000$ g rozpocząłby poślizg. Stosunek: $\frac{s}{N} = \frac{3000}{5000} = 0{,}6$
jest, jak się okazuje, ten sam, co nie jest przypadkiem, ale wielkim naszym odkryciem fizycznym, bo tyle wynosi on zawsze przy poślizgu metalu o drewno (na sucho).*
Liczbę tę otrzymaną z podzielenia niezbędnej dla poślizgu siły s przez działający nacisk N, nazywają fizycy współczynnikiem tarcia (w skrócie naszym μ).
Liczby μ powyliczano w tysiącach prób dla niezliczonych par powierzchni trących się **, co ukazuje w zarysie tabelka obok.

metal o drewno na sucho	$\mu = 0{,}6$
drewno o drewno na sucho	$\mu = 0{,}65$
drewno o drewno ze smarem	$\mu = 0{,}20$
stal o stal na sucho	$\mu = 0{,}15$
lina konopna o drewno	$\mu = 0{,}5$
stal o lód	$\mu = 0{,}03$

Z naszego doświadczalnego wzoru $\frac{s}{N} = \mu$ (wzór pierwszy)

wynika (przez pomnożenie obu stron poprzedniego wzoru przez N) wzór następny, jeszcze ważniejszy $s = \mu \cdot N$ (wzór drugi)

I tak osobnik o ciężarze 70 kg wywierający więc nacisk $N = 70$ kg, stojący na lodzie na stalowych łyżwach ($\mu = 0{,}03$ według tabelki) wykonałby już poślizg, pchnięty lub pociągnięty siłą s, którą jakże łatwo obliczyć: $s = 0{,}03 \cdot 70\ \text{kg} = 2{,}1$ kg (dlatego tak łatwo się ślizgać).
Dla opisanej na początku katastrofy $\mu = 0{,}5$ (konopna lina tarła się o drewniany pal) liczymy podobnie: $s = 0{,}5 \cdot N$ (do tego miejsca potem powrócimy).
Przydałby się też osobny wzór na liczenie siły tarcia T. Ponieważ według Newtona siła tarcia T jako przeciwdziałająca sile s jest jej równa (choć przeciwnie skierowana), więc zamiast s we wzorze drugim możemy śmiało napisać T, tak że dostaniemy:

$$T = \mu \cdot N$$ (wzór już trzeci, ale łatwy, więc do niego powrócimy ...)

Myśl druga

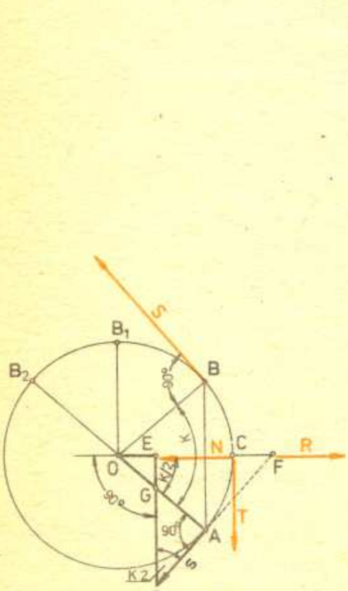
Zbadajmy teraz bliżej, co się właściwie dzieje na drewnianym palu zbawczym dla obsługi samochodu i dla samego samochodu. Rysunek 2 pokazuje poprzeczny przekrój tego pala.
Rysunku nie trzeba się przestraszyć bo „nie święci garnki lepią"...
Musimy sobie wyobrazić łuk AB jako bardzo maleńki kawałek konopnej liny, ściśle przyciśnięty naciskiem N (aha, jest on i tutaj) do obwodu pala. Zręczny rysownik „Horyzontów Techniki" na naszą prośbę naumyślnie narysował tę cząstkę liny tak wyolbrzymioną dla lepszego „wglądu" (mówiąc językiem wojskowym). Łuki BB_1, B_1B_2 — to dalsze cząstki liny w lewą stronę a więc bliżej samochodu, ciągnącego siłą S (duże S), w odróżnieniu od siły robotnika s (małe s) ciągnącego w przeciwną stronę, aby zapobiec katastrofie.
W środku tej maleńkiej cząstki AB liny jest taki sobie punkt C. Można dla ułatwienia rozumowania powiedzieć, że właśnie tam działa
1. nacisk N przywierający linę do pala
2. reakcja R sprężystości pala,
3. tarcie T przeciwdziałające sile S, a pomagające sile s.

Mamy więc tu naszych trzech dobrych „znajomych"...
Jeżeli samochód (siła S) ma się staczać, to musi przezwyciężyć siłę robotnika (siła s) i zarazem tarcie T, tak że siła S powinna co najmniej równać się im obu

$$S = s + T$$ (wzór czwarty)

Ale według wzoru trzeciego $T = \mu \cdot N$, czyli $T = 0{,}5 \cdot N$, możemy we wzorze czwartym zamiast T napisać $0{,}5 \cdot N$. Wypadnie

$$S = s + 0{,}5 \cdot N$$ (wzór piąty wcale nie trudniejszy)



Rys. 2

Myśl trzecia

Trzeba teraz koniecznie uwzględnić kąt opasania liną pala naprzeciw cząstki AB. Ten kąt nazwano na rysunku 2 literą K (kąt). Dla połówki cząstki AB ten kąt wynosi już tylko połowę czyli $K/2$, co jest zupełnie jasne.
Kąt przyzwyczailiśmy się mierzyć kątomierzem w stopniach.
Zwyczajem matematyków (a także bardzo często techników i inżynierów) zmierzymy go nieco inaczej. Po prostu zbadajmy, ile razy obwód pala ($2\pi r$) jest większy od jego promienia (r).

Dzielimy $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi = 2 \cdot 3{,}14 = 6{,}28.$

Jeżeli robotnik opasał pal liną 2 razy naokoło, to kąt liczony w tej mierze „łukowej" wyniesie

$$2 \cdot \frac{2\pi r}{r} = \frac{4\pi r}{r} = 4\pi = 4 \cdot 3{,}14 = 12{,}56$$

Połowę naszej cząstki AB opasuje lina zapewne bardzo małym kątem $K/2$ na przykład 1° w mierze stopniowej. W tej nowej mierze (zwanej łukową) będzie to oczywiście 360 razy mniej, niż wypadło dla jednego pełnego opasania obwodu pala liną. Dzielimy 6,28: 360 = 0,017.

Myśl czwarta

Dla bardzo małych kątów K można wprowadzić jeszcze „sprytniejszą" miarę, polegającą na tym, że dzieli się po prostu umówiony bok przez bok w trójkącie prostokątnym, oczywiście w takim, w którym jest też ów bardzo mały kąt jaki właśnie chcemy zmierzyć. Mówiąc inaczej zastępujemy cząstkę okręgu króciutkim odcinkiem otrzymując przybliżoną miarę łukową. Rysunek trzeci przedstawia taki trójkąt prostokątny DEF, wyrysowany ekierką i kątomierzem z dowolnych zupełnie boków, byle kąt przy wierzchołku D nazywany tam znowu $K/2$ wynosił bardzo mało stopni, ot, choćby jak mówiono poprzednio 1°. Proponujemy wykonać następującą próbę: podzielić bok EF przez bok DF, musi wypaść 0,017, a więc tak samo jak w mierze „łukowej" (ale nie stopniowej). Ten „trick" jest matematycznie dozwolony tylko dla kątów K mniejszych od 3°. Ponieważ połówka naszej cząstki AB na pewno nie jest opasana liną na większym kącie, więc rzetelności matematycznej stało się zadość.

Myśl piąta

Jak powiedziano, promień OC dzieli kąt K opasania cząstki AB na pół. Stąd słusznie przy środku przekroju pala w punkcie O pokazano też kąt $K/2$. Dlaczego napisano jednak na tymże rysunku 2 symbol $K/2$ również przy punkcie D? Jest to też słuszne, tylko trzeba teraz znów nieco otrzeć się o geometrię elementarną. Ponieważ nikt nie może nas wyśmiać, zróbmy to wspólnie: dwa trójkąty OEG oraz ADG (radzimy obiec je ołówkiem) mają po kącie prostym (mianowicie przy wierzchołkach E oraz A); dalej równe są w nich też oba kąty M, M' jako wierzchołkowe, tak że muszą być i równe kąty $K/2$, $K'/2$, jako reszta w każdym z nich do 180°. Mamy zatem prawo śledzić połowę kąta opasania cząstki AB również koło punktu D, o co nam bardzo chodziło...

Myśl szósta (w której, jakby swawolnie powiedział Dickens, powtórzą się myśli piąta i czwarta).

Śledzimy na rysunku 2 trójkąt DEF, który jest niejako „rozciągniętym" w górę trójkątem poprzednim ADG, więc też zawiera kąt $K/2$, z jakim dopiero co uporaliśmy się. Jeden bok tego trójkąta, mianowicie EF, wyobraża z grubsza nacisk N; wynosi więc N. Drugi bok, mianowicie DF, jest prawdę mówiąc — nieco „sztukowany" i to kawałkiem DA wyobrażającym siłę s robotnika oraz kawałkiem AF, który też, bez większego błędu, można przyjąć jako s. Słowem „sztukowany" bok DF liczymy jako $2s$. Teraz możemy zastosować naszą „bokową" miarę dla bardzo małego kąta $\frac{K}{2}: \quad \frac{N}{2s} = \frac{K}{2}$

Z tego $$N = K \cdot s \qquad \text{(wzór szósty)}$$

Zamiast N we wzorze piątym ($S = s + 0{,}5 \cdot N$) piszemy nasze obliczone $N = K \cdot s$ otrzymując $S = s + 0{,}5 \cdot K \cdot s = s(1 + 0{,}5 \cdot K)$. Słowem w cząstce AB liny samochód ciągnie siłą

$$S_{AB} = s(1 + 0{,}5 \cdot K) \qquad \text{(wzór siódmy)}$$

Myśl siódma (i przedostatnia)

Dla świętego spokoju z kątem K, który przecież powinien być niezmiernie mały, skoro opasuje maleńką cząstkę liny AB, podzielmy go jeszcze w myśli na bardzo wiele części, na przykład na n części, przy czym liczba n rozumie się jako ogromna. Tak nasz wzór siódmy zmienia się nieco

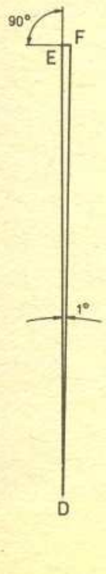
$$S_{AB} = s\left(1 + 0{,}5 \cdot \frac{K}{n}\right) \qquad \text{(wzór ósmy)}$$

Ten wzór jest bardzo wymowny. Widać z niego jak na dłoni, że naciąg S, wywołany samochodem w cząstce AB, jest $\left(1 + 0{,}5 \cdot \frac{K}{n}\right)$ razy większy od naciągu s wywołanego siłą robotnika.

Oczywiście w następnej w lewo cząstce BB_1 naciąg S wzmoże się znowu $\left(1 + 0{,}5 \cdot \frac{K}{n}\right)$ razy więcej i wyniesie już w tej dalszej, bliższej samochodowi cząstce

$$S_{BB_1} = s\left(1 + 0{,}5 \cdot \frac{K}{n}\right) \cdot \left(1 + 0{,}5 \cdot \frac{K}{n}\right)$$

czyli $$S_{BB_1} = s\left(1 + 0{,}5 \cdot \frac{K}{2}\right)^2 \qquad \text{(wzór dziewiąty)}$$



Rys. 3

Teraz jesteśmy w domu. W miarę przesuwania się po linie w stronę działania siły S naciągi wywołane nią wzrastają według potęg, a w miarę przesuwania się w stronę działania siły s robotnika maleją według potęg. Na ostatniej cząstce w lewo, w stronę działania siły S, na podstawie wzoru dziewiątego naciąg jej wyniesie już

$$S_n = s\left(1+0{,}5\cdot\frac{K}{n}\right)^n \quad \text{(wzór dziesiąty, uogólnienie dziewiątego, więc nic strasznego)}$$

Myśl ósma (ostatnia, ponieważ wszystko ma swój koniec)

Nastąpi teraz błyskotliwy, prawdziwie matematyczny „trick", Oto zamiast ułamka z nawiasu $0{,}5\cdot\frac{K}{n}$ napiszemy sobie $\frac{1}{x}$. (Liczbę x matematycy specjalnie uwielbiają, bo właściwie nie wiadomo co... ona warta). Ale żarty na bok. Proponujemy takie zastępstwo:

$$0{,}5\cdot\frac{K}{n} = \frac{1}{x} \quad \text{(wzór jedenasty)}$$

Z tego mamy dalszy wzorek

$$x\cdot 0{,}5\cdot K = n \quad \text{(wzór dwunasty, jego bliski krewniak)}$$

Oczywiście o liczbie x jednak tyle wiadomo, że musi też być bardzo wielka. Wystarczy zauważyć, że we wzorze jedenastym n oraz x odpowiadają sobie w mianownikach. Teraz wzór dziesiąty prezentuje się w nowej postaci. Jak wiadomo, potęgować wykładnikami x, 0,5 i wreszcie K możemy w dowolnej kolejności, a nawet „na raty"

$$S = s\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x\cdot 0{,}5\cdot K} \quad \text{(wzór trzynasty, mały ale śmiały)}$$

Bierzemy „pod lupę" wewnętrzny nawias z jego „przyboczną" potęgą $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

Obieramy w myśli kolejno zamiast x liczby 1, 2, 3, 4 itd., pamiętając, że powinniśmy dojść do obioru jak największych x.

Oto próby:

$x = 1$, mamy $\left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = (1+1) = 2$ $\qquad$ $x = 3$, mamy $\left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} = 2{,}37$

$x = 2$, mamy $\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2{,}25$ $\qquad$ $x = 4$, mamy $\left(1+\frac{1}{4}\right)^4 = \left(\frac{5}{4}\right)^4 = \frac{625}{256} = 2{,}4$

Można by się samemu przekonać, że nawet dla największych obieranych x, a takie powinny tu one być, nasz nawias z uwzględnieniem jego potęgi x nie wyniesie „marnego" 2,7182... Tę to liczbę 2,71... od czasów Eulera matematycy oznaczają literą e. Jest to z pewnych względów najważniejsza liczba w matematyce (wobec niej liczba π jest „ubogim krewnym"). Koniec końców nasz wzór trzynasty pozwala zamiast $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ napisać krótko e. Będzie więc

$$S = s\cdot e^{0{,}5\cdot K} \quad \text{(wzór czternasty, ten z nagłówka artykułu: mały wzór wielkiego Eulera)}$$

Ponieważ chcielibyśmy wyliczyć teraz z jaką wreszcie siłą ów robotnik wstrzymywał końcem nieuwiązanej liny staczający się samochód, przeróbmy jeszcze nasz wzór tak, aby mieć s po lewej stronie $\quad s = \frac{S}{e^{0{,}5\cdot K}}$

Pamiętamy przy tym, że s oznacza wysiłek skierowany przeciw potężnej sile S, e = 2,71...
0,5 jest współczynnikiem tarcia dla liny konopnej o drewno (można tu zawsze wymienić to μ na inne) wreszcie K jest „kątem opasania". Możemy więc przystąpić do obliczenia
S (duże, siłę staczającego się samochodu) przyjmijmy na 4000 kg.
K (kąt opasania liną pala) przyjmijmy

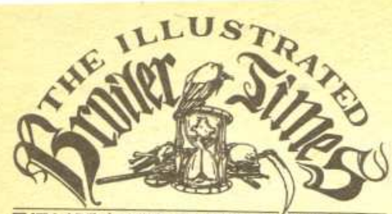
$$2\cdot\frac{2\pi r}{r} \text{ (robotnik owinął linę 2 razy)} = 4\pi = 4\cdot 3{,}14 = 12{,}56$$

$$s = \frac{4000\ \text{kg}}{2{,}71^{0{,}5\cdot 12{,}56}} = \frac{4000\ \text{kg}}{2{,}71^{6{,}28}}.$$

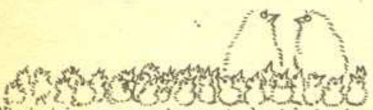
Podnosząc teraz 2,71 do potęgi okrągło szóstej (czyli mnożąc 2,71 przez siebie kolejno 6 razy) dostaniemy okrągło 400. Dzieląc wreszcie 4000 przez 400 mamy $s = \frac{4000\ \text{kg}}{400} = 10$ kg.

Z taką śmiesznie małą siłą s robotnik powstrzymywał samochód, staczający się z potężną siłą S. Okazuje się, że mogło go bez żadnego ryzyka zastąpić ... dziecko. Sprawca całej tej debaty matematycznej, małoletni Przemko jest olśniony, że i on mógłby się już przydać podczas awarii i zachwyca się metodą matematyczną przy badaniu zagadnień techniki.

Proponujemy Czytelnikom obliczyć małym wzorem wielkiego Eulera, jaką siłą s można by powstrzymać bieg traktora ciągnącego siłą S = 6000 kg jeśli stalową linę nawinęliśmy naokoło stalowego pala 4 razy?



THEY ARE COMING TO TAKE ME AWAY
HA,HA,HI,HI..



Nie jest jasne czego je uczyć aby ich życie było pełne i celowe?

Język potoczny wprowadza pomieszanie pojęć, nawet moje π,π można rozumieć DWOJAKO

Owszem, znana jest nam forma zwracania się do rozmówcy odczynnościowo per: pacjencie, konsumencie, studencie itp.
Nie uważamy jej jednak za szczyt wytworności: "Oj, docencie, docencie, a tu żeście się wygłupili" - fi donc.

*

Do tego rodzaju kłopotów wstyd się przyznać lekarzowi, po co o tym pisać do gazety?

*

My też nie wiemy.

*

Oczywiście, że nasze zadania są nudne. A czego pan oczekiwał?

*

Co z tego, że wypisuje nam pan listę następnych 19 kwarków. Nie obchodzą nas takie spekulacje, szczególnie że nie dysponuje pan żadnymi dowodami.

*

Z soi oczywiście.

*

Czekoladowego tortu nie da się zrobić z margaryny. Pani argumenty dotyczące związków organicznych są całkowicie absurdalne - łańcuchy węglowe to nie robótki ręczne, żeby je spruć i przerobić.

*

Nie rozumiemy związku między pańskim systemem a wygranymi końcówkami banderoli. I po co panu samochód?

*

Oczywiście! Gdziekolwiek byśmy się nie znaleźli i jakkolwiek byłoby to niewygodne NALEŻY UŚCISNĄĆ DŁOŃ WSZYSTKIM ZNAJOMYM I NIEZNAJOMYM OSOBOM.

*

Myli się pan, nie jestem niewydarzonym safandułą. Co za pomysł?

*

MUSZĘ uwierzyć, że jestem taki sam jak wszyscy