Jak zobaczyć wszystkie liczby 2-adyczne

Prof. dr Jerzy MIODUSZEWSKI

W artykule Krystyny Wojtków o liczbach p-adycznych Delta 9 (1978) używany był zapis pozycyjny ...123456789; w niniejszym artykule cyfry stoją w odwrotnym porządku: 987654321...

Liczby 2-adyczne całkowite, tj. wyrażenia $a_0+a_1\cdot 2+a_2\cdot 2^2+\ldots$, gdzie $a_n = 0$ lub 1, których zapisy skracamy do $a_0a_1a_2\ldots$, można mnożyć (jak się je dodaje, p. poprzedni artykuł na ten temat, Delta 5/1979; były one tam nazywane, aby nie obciążać terminologii, liczbami dwójkowymi). Aby pomnożyć liczbę $a = a_0a_1a_2\ldots$ przez liczbę $b = b_0b_1b_2\ldots$, mnożymy liczbę a kolejno przez b_0, b_1, etc. (jest to niekłopotliwe, bo mnożymy stale przez 0 lub 1), a kolejne wyniki zapisujemy jeden pod drugimi przesuwając za każdym razem zapis o jedno miejsce w prawo (przy mnożeniu liczb w układzie dziesiątkowym przyzwyczajeni jesteśmy do przesuwania zapisów w lewo) i dodajemy kolumny mod 2, pamiętając o dodaniu do następnej kolumny całkowitej ilości dwójek jaką dostaliśmy; rzecz daje się formalnie określić przez indukcję (mnożenie w układzie dziesiątkowym jest też określone przez indukcję, ale opanowujemy je na tyle wcześnie i dobrze, że nigdy już potem nie czujemy potrzeby matematycznych uzasadnień).

Jeśli oba zapisy są skończone, to reprezentując liczby naturalne nie dostajemy nic innego niż zwykły iloczyn liczb naturalnych. Np. mnożąc 7 = 111 przez 5 = 101, dostajemy

$$\begin{array}{l} 111 \\ \;000 \\ \;\;111 \\ \hline 110001 \end{array}$$

tj. liczbę $1+1\cdot 2+1\cdot 2^5 = 35$.

Jeśli zapisy są nieskończone, nie trzeba sobie przeszkadzać myślą, że robimy coś złego dodając nieskończenie wiele razy: w każdej kolumnie mamy do dodania skończenie wiele liczb, więc dodać je można, a cyfry wyniku określone są przez indukcję jednoznacznie. Dla przykładu, pamiętając, że $-1 = 111\ldots$, pomnożmy to -1 przez siebie. Dostajemy:

$$\begin{array}{l} 111111\ldots \\ \;11111\ldots \\ \;\;1111\ldots \\ \;\;\;\ldots\ldots \\ \hline 100000\ldots \end{array}$$

Dostaliśmy 1, co nie jest niespodzianką.

Liczba 1 jest neutralna przy mnożeniu; jest także zawsze $a\cdot 0 = 0$; to widać. Dowody innych własności mnożenia liczb 2-adycznych, np. przemienności, łączności, rozdzielności z dodawaniem są kłopotliwe, bo powinny być robione przez indukcję, skoro mnożenie było określane przez indukcję. Nie stanowią jednak problemu.

*

Problemem jest dzielenie. Już dzielenie 1:2 się nie udaje. Wynik dzielenia (myślimy o nim jako o 1/2) byłby rozwiązaniem równania $2x = 1$. Pierwsza cyfra x_0 liczby x przemnożona przez 0 (pierwszą cyfrę liczby 2 = 01) powinna by dać 1 (pierwszą cyfrę liczby 1). Nie uda się też dzielenie 1:6.

Jest to cena za wybór podstawy rozwinięcia, bo dzielenia $1:n$, jeśli n jest nieparzyste, udają się. Liczbę 1/3, tj. rozwiązanie równania $3x = 1$, znajdujemy wyznaczając indukcyjnie cyfry jej rozwinięcia $x_0x_1x_2\ldots$, jak następuje (pamiętamy, że 3 = 11):

$$\begin{array}{l} x_0x_1x_2x_3\ldots \\ \quad x_0x_1x_2\ldots \\ \hline 1\ 0\ 0\ 0\ldots \end{array} \qquad \begin{array}{l} x_0 = 1 \Rightarrow x_1+1 = 0 \Rightarrow \\ x_1 = 1 \text{ (1 w pamięci)} \Rightarrow x_2+2 = 0 \\ \Rightarrow x_2 = 0 \text{ (1 w pamięci)} \Rightarrow \\ x_3+1 = 0 \Rightarrow x_3 = 1 \text{ (1 w pamięci);} \end{array}$$

na miejscu x_3 powtarza się sytuacja z miejsca x_1; rozwinięcie jest więc począwszy od miejsca x_1 okresowe; okres ma postać 10; mamy więc

$1/3 = 1\,\overset{\frown}{10}\,\overset{\frown}{10}\ldots$ (okres 10)

A oto rozwinięcia innych liczb postaci $1/n$:

$1/5 = 1\,\overset{\frown}{0110}\,\overset{\frown}{0110}\ldots$ (okres 0110)

$1/7 = 1\,\overset{\frown}{110}\,\overset{\frown}{110}\ldots$ (okres 110)

$1/9 = 1001110001110\ldots$ (okres 001110)

$1/11 = 11000101110100010111 0\ldots$ (okres 1000101110)

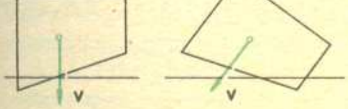
Wszystkie te rozwinięcia są okresowe.

Okazuje się, że ułamki liczb całkowitych o mianownikach nieparzystych tj. rozwiązania równań $nx = m$ o współczynnikach całkowitych, gdzie n jest nieparzyste mają zawsze rozwinięcia okresowe, oraz że każda liczba 2-adyczna okresowa przedstawia (w określony wyżej sposób) pewien taki ułamek.

Dla przykładu, liczba 2-adyczna 110001000... przedstawia ułamek 13/15. Prowadzi do tego obliczenie:

$$110001000\ldots = 1+2+2^5+\ldots = 1+2\cdot(1+2^4+\ldots) = 1+2\cdot\frac{1}{1-2^4} = 1-2/15 = 13/15.$$

Rozwiązanie zadania F 76. Ostrze gilotyny w układzie U' będzie pochylone w przeciwną stronę.



a) W układzie U. b) W układzie U'.

Rozwiązanie zadania F 74. Na ekranie kinowym nic się naprawdę nie porusza. Jest to ciąg nieruchomych obrazów, który daje tylko złudzenie ruchu dzięki sposobowi wyświetlania i właściwościom ludzkiego oka. Prędkość "ruchu" można dowolnie zwiększać przez zwiększanie częstotliwości obrazów, lecz żadne skrócenie, wobec braku ruchu obiektu materialnego, nie wystąpi.

Chociaż obliczenie nie jest poprawnie uzasadnione, prowadzi do poprawnego wyniku: jeśli się przemnoży 110001000... przez 1111 tj. przez 15, to dostaje się 1101 tj. 13.
Obliczenie rozwinięć dwójkowych ułamków 1/5, ..., 1/11, też polegało na zastosowaniu takiego nieuzasadnionego sposobu, obliczenie takie jak dla 1/3 byłoby żmudne. Dowody wypowiedzianych przedtem dwu stwierdzeń polegają na uzasadnieniu tych a priori nieuzasadnionych obliczeń.

*

Defekt zbioru liczb 2-adycznych całkowitych polegający na niemożliwości dzielenia w nim przez 2, jest teraz na tle zauważonych prawidłowości dokuczliwy.
Można usunąć ten defekt, jeśli rzecz potraktuje się nieco ogólniej. Nie ma żadnych przeszkód w dodawaniu i mnożeniu (takim jak dotąd) zapisów dwójkowych, jeśli mają one dodatkowo skończenie wiele cyfr na lewo od cyfry x_0, tj. w dodawaniu i mnożeniu zapisów postaci

$$x_{-m}\dots x_{-1}x_0x_1x_2\dots,\ \text{gdzie } x_j \text{ jest 0 lub 1.}$$

Zapisy takie, jeśli są skończone, mają interpretację jako sumy potęg dwójki:

$$x_{-m}\dots x_{-1}x_0x_1\dots x_n = x_{-m}\cdot 2^{-m}+\dots+x_{-1}\cdot 2^{-1}+x_0+x_1\cdot 2+\dots+x_n\cdot 2^n.$$

Przykłady: 1,000... = 1/2 i 11,01000... = $2\frac{3}{4}$; w konkretnych zapisach dajemy przecinek przed miejscem cyfry x_0.

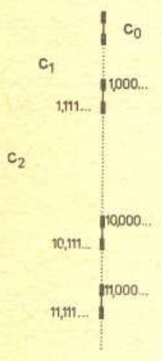
A oto przykłady dodawania i mnożenia

$$\begin{array}{r} 11{,}01 \\ +01{,}00 \\ \hline 10{,}11 \end{array} \quad \text{tj. } 2\frac{3}{4}+\frac{1}{2} = 3\frac{1}{4};$$

$$\begin{array}{r} 11{,}01 \\ \times 01{,}00 \\ \hline 110{,}1 \end{array} \quad \text{tj. } 2\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} = 1\frac{3}{8}.$$

Nie można pójść dalej tak, aby dodawać i mnożyć zapisy dwójkowe mając nieskończenie wiele cyfr przed przecinkiem, bo określenie dodawania i mnożenia, indukcyjne, wymaga zapoczątkowania go w pewnym miejscu.
W zakresie liczb 2-adycznych *ogólnych*, bo tak je nazwiemy, nie ma już kłopotów z dzieleniem (chyba że przez 0), o czym się nietrudno przekonać wymyślając lepszą lub gorszą (nieważne) indukcyjną procedurę dzielenia.
Zbiór liczb wymiernych zawarty jest, z zachowaniem działań, w zbiorze liczb 2-adycznych ogólnych: każda liczba wymierna ma dokładnie jedno przedstawienie w postaci $2^k\cdot\frac{p}{q}$, gdzie k, p i q są całkowite i żadna z liczb p i q nie jest parzysta; wtedy liczba $\frac{p}{q}$ ma, co już wiemy, interpretację jako liczba 2-adyczna całkowita $1x_1x_2\dots$ (cyfra x_0 jest równa 1, co wynika z nieparzystości liczb p i q), i żeby otrzymać zapis 2-adyczny liczby $2^k\cdot\frac{p}{q}$, wystarczy przesunąć poprzedni zapis o k pozycji w prawo (a więc w lewo, jeśli k jest ujemne).

*



Rys. 1. Wydłużony zbiór Cantora

Liczby 2-adyczne ogólne można zobaczyć.
Jeśli liczbę $x_0x_1\dots$ (traktując ją jako ciąg zer i jedynek) widzimy jako punkt zbioru Cantora C_0 (zob. poprzedni artykuł), to liczbę $x_{-1}x_0x_1\dots$ można zobaczyć na zbiorze Cantora C_1, dla którego zbiór C_0 jest lewą połówką: liczbę $x_{-2}x_{-1}x_0x_1\dots$ można zobaczyć na zbiorze Cantora C_2, dla którego zbiór C_1 jest lewą połówką, etc.
Zbiór liczb 2-adycznych ogólnych można więc utożsamić z sumą ciągu rosnącego $C_0, C_1, C_2, \dots$ zbiorów Cantora, położonych na prostej tak jak pokazuje rysunek. Metryka zbioru liczb 2-adycznych ogólnych, jaka wynika z ich ułożenia na *wydłużonym zbiorze Cantora* (znana częściowo z poprzedniego artykułu) może się wydać osobliwa: np. odległości od 0 ułamków $1/2^k$ (leżą one zawsze w prawych połówkach zbiorów C_k) dążą do nieskończoności zamiast do zera, jak jesteśmy przyzwyczajeni.
Liczby wymierne położone są, jako liczby 2-adyczne, na wydłużonym zbiorze Cantora z zachowaniem działań i stanowią jego podzbiór gęsty: jest więc formalna analogia z położeniem ich na prostej. Ale położone są inaczej niż na prostej: już liczby całkowite leżą gęsto w porcji C_0 zagęszczając się same do siebie (wiemy to już z poprzedniego artykułu; na prostej liczby całkowite stanowią zbiór punktów izolowanych); dodajmy, że wielokrotności liczby 1/2 leżą gęsto w C_1, wielokrotności liczby 1/4 leżą gęsto w C_2, etc.

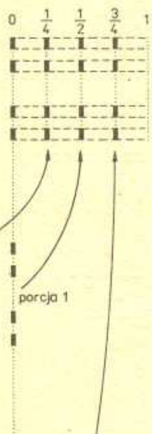
*

Metryka wydłużonego zbioru Cantora (tak jak metryka prostej) jest zupełna: wszystkie ciągi, które mogłyby być zbieżne (tj. te, które spełniają warunek Cauchy'ego), są zbieżne. Wydłużony zbiór Cantora jest więc (podobnie jak prosta) uzupełnieniem zbioru liczb wymiernych.
Uzupełnienie to (podobnie jak prosta) ma prawidłową budowę algebraiczną: wszystkie cztery działania (z wyjątkiem dzielenia przez 0) są w nim wykonalne. Co więcej, są ciągłe. Nie zmienimy istoty rzeczy (bardziej fachowo: topologii), jeśli za odległość liczb 2-adycznych x i y przyjmiemy (zamiast ich odległości na wydłużonym zbiorze Cantora) liczbę określoną w następujący sposób za pomocą miejsca, na którym cyfry w zapisach liczb x i y zaczynają się różnić: liczba ta jest równa n, jeśli to jest n-te miejsce przed przecinkiem, a jest równa $1/m$, jeśli to jest miejsce cyfry x_m po przecinku. Łatwiej jest teraz dowieść, że działania na liczbach 2-adycznych ogólnych są

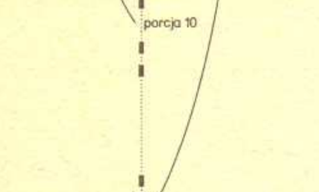
Rozwiązanie zadania M 220.
Sumą współczynników wielomianu $p(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$ jest oczywiście $p(1) = a_0+a_1+\dots+a_n$.
Ale
$p(1) = (1^2-3\cdot 1+2)^{73}(1^3+1-1)^{72} = 0$
i wobec tego suma współczynników $p(x)$ jest równa zeru.

W poprzednim artykule prof. dr J. Mioduszewskiego o liczbach 2-adycznych (Delta 8/1979) znalazło się błędne określenie odległości liczb 2-adycznych dwójkowych. Wiersze 16, 17 i 18 na str. 2 powinny tam mieć brzmienie: ,,Nie zmienimy istoty rzeczy, jeżeli za odległość liczb dwójkowych przyjmiemy liczbę $1/n$, gdzie n jest numerem miejsca, na którym cyfry w zapisach tych liczb zaczynają się różnić". Błąd ten powstał wyłącznie z winy Redakcji i Autor nie ponosi zań żadnej odpowiedzialności. Przepraszamy prof. dr Mioduszewskiego i naszych Czytelników.

Warto tu zauważyć, że redakcja Delty dostała list od takiej p-adycznej istoty. Zamieściliśmy go w numerze 12/1979



Rys. 2. Liczby 2-adyczne sprzątamy ze stołu do szafy.



Rys. 3. Półprosta zaczynająca się w O przebiega odcinek nad punktem O w górę do końca, potem odcinek nad 1 w górę do końca, potem odcinek nad 2 itd.

ciągłe: argumentacja użyta w poprzednim artykule (dokładniej w sprostowaniu obok), dla dowodu ciągłości dodawania i odejmowania liczb 2-adycznych całkowitych, powinna wystarczyć za wskazówkę dowodu.

*

Ceną za zupełność jest duża moc zbioru: zbiór liczb 2-adycznych ogólnych tak jak i zbiór liczb rzeczywistych ma moc continuum. Ale mimo to, że jest ich tak dużo, nie ma wśród nich np. $\sqrt{2}$, tj. takiej liczby x, dla której $x^2 = 2$; próbując znaleźć taką liczbę, dojdziemy do sprzeczności już przy próbie znalezienia jej pierwszych dwu cyfr. Są za to $\sqrt{-7}$ i $\sqrt{17}$.
Na liczby rzeczywiste pracowała wyobraźnia matematyków przez co najmniej dwa tysiąclecia, wiążąc z nimi z góry najrozmaitsze idee geometryczne i arytmetyczne. Liczby 2-adyczne (jeśliby nie było inaczej) mogłaby wymyśleć maszyna, czuła jedynie na formalne zapisy cyfrowe. Stąd, mimo zaskakujących osobliwości, nie spodziewajmy się po nich rzeczy, których ich natura nie przewidziała.
Trudno wszakże odrzucić, jako całkowicie nieuzasadnioną, myśl o tym, że gdzieś w przestrzeni ewolucja życia już w samych zaczątkach polegała na doskonaleniu w odbieraniu dwu sygnałów np. **jest** i **nie ma** i rozwijaniu aktywności i twórczości naukowej zgodnie z tymi sygnałami o dwu cyfrach. Po miliardach lat ewolucji stopień pojmowania przez wykształcone tak istoty ich arytmetyki, a byłaby to właśnie arytmetyka 2-adyczna, byłby porównywalny ze stopniem pojmowania przez nas arytmetyki liczb rzeczywistych. Ich poznanie zmysłowe nie potrzebowałoby ani $\sqrt{2}$, ani zapewne liczby π. Mogliby nas nie zauważyć, zajmując nawet to samo miejsce w przestrzeni. My ich także.

*

Liczby 2-adyczne ogólne zobaczmy jeszcze raz inaczej, układając je ciaśniej koło siebie. Wydłużony zbiór Cantora składa się z przeliczalnej ilości porcji przystających do porcji C_0. Nadamy każdej z tych porcji kod będący zapisem sprzed przecinka, wspólnym dla wszystkich liczb tej porcji. Na rys. 1 kolejne porcje, poza C_0, mają kody 1, 10, 11, ... Zinterpretujmy te kody jako sumy kolejnych (licząc od lewej) odwrotności potęg dwójki (zgodnie zresztą ze znaczeniem cyfr sprzed przecinka), a więc jako liczby 1/2, 1/4, 3/4, ... Przesuńmy teraz wspomniane porcje nad porcję C_0, równolegle do C_0, nadając im rzędne 1/2, 1/4, 3/4, ... (rys. 2). Zbiór liczb 2-adycznych ogólnych ułożył się teraz w kwadracie jednostkowym nad zbiorem C_0, a dokładniej w wiązce odcinków jednostkowych (pionowych) nad zbiorem Cantora C_0, tj. na produkcie $C_0 \times [0, 1]$; wiązka ta pojawiła się już w poprzednim artykule. Liczby 2-adyczne ogólne nie wypełniają całej wiązki, lecz jedynie jej poziomy dwójkowo wymierne i to bez poziomu 1. Liczba 2-adyczna ogólna $x_{-m} \dots x_{-1} x_0 x_1 \dots$ ma teraz dwie współrzędne: pierwszą jest jej zapis $x_0 x_1 \dots$ złożony z cyfr po przecinku i reprezentujący liczbę 2-adyczną całkowitą ze zbioru C_0, a drugą jest liczba rzeczywista $x_{-m} \cdot 2^{-m} + \dots + x_{-1} \cdot 2^{-1}$.

*

Inne punkty wiązki nie są liczbami 2-adycznymi (przypomnijmy sobie, że nie dopuściliśmy zapisów z nieskończoną ilością cyfr przed przecinkiem). Mimo to pewną część budowy algebraicznej spróbujmy na ten zakres przenieść: dwa punkty wiązki zechcemy dodać, dodając odpowiednie współrzędne; pierwsze (odcięte) dodajemy tak jak się dodaje liczby 2-adyczne (całkowite); drugie (rzędne) dodajemy tak jak się dodaje liczby rzeczywiste modulo 1 z tym, że, część całkowitą dodajemy do wcześniej otrzymanej sumy odciętych. Dla przykładu, jeśli chcemy dodać (0, 1/2) i (0, 1/2), to dostajemy najpierw (0, 1), a potem (po zredukowaniu drugiej współrzędnej mod 1) dostajemy końcowy wynik (1, 0) (dodawaliśmy 1/2 do siebie dostając 1). Punkt (0, 1) okazuje się w tym dodawaniu zbyteczny: utożsamiamy go z punktem (1, 0).
Aby dodawanie było poprawnie określone, trzeba utożsamić nie tylko te dwa punkty, ale każdy punkt $(x, 1)$ poziomu 1 z punktem $(x+1, 0)$ poziomu 0. Takie sklejenie brzegów wiązki nad zbiorem Cantora daje znany już nam z poprzedniego artykułu solenoid.

*

Określając dodawanie na punktach solenoidu potraktowaliśmy zapis liczby 2-adycznej ogólnej niejednolicie: część sprzed przecinka traktowaliśmy jako liczbę rzeczywistą, a część po przecinku jako liczbę 2-adyczną całkowitą. Stąd mieszana budowa solenoidu.
Zawiera on zachowując dodawanie wszystkie liczby 2-adyczne ogólne, chociaż geometrycznie inaczej niż wtedy kiedy tworzą one wydłużony zbiór Cantora. Ale liczby 2-adyczne całkowite leżą na solenoidzie już z zachowaniem własności geometrycznych: leżą one na śladzie sklejenia górnego i dolnego brzegu wiązki; jeśli to sklejanie wyobrazić sobie tak, że dolny brzeg wiązki się nie rusza, to wspomniany ślad sklejenia jest zbiorem Cantora C_0.
Solenoid zawiera zachowując dodawanie prostą. Jest nią linia będąca sumą odcinków wiązki nad punktami reprezentującymi liczby całkowite (końce porcji zbioru Cantora C_0). Odcinek nad punktem n doklejony jest swym końcem $(n, 1)$ do odcinka nad punktem $n+1$ w jego początku $(n+1, 0)$.

Budowa geometryczna tej linii jest jednak inna niż prostej: żaden przedział nie jest w niej zbiorem otwartym, co znaczy to samo co by powiedzieć, że zagęszcza się ona sama do siebie. Linia ta tworzy zbiór gęsty w solenoidzie. Solenoid składa się z continuum takich linii homeomorficznych ze sobą i rozłącznych; widzieliśmy to w poprzednim artykule.

*

My polecamy także Borewicza i Szafarewicza „Теория чисел"

Liczby 2-adyczne zostały odkryte na przełomie wieku przez Kurta Hensela (1861—1941). *Introduction to p-adic numbers and valuation theory* G. Bachmana jest najdostępniejszą z poważnych książek o liczbach 2-adycznych. W numerze 2(1979) miesięcznika KBAHT ukazał się artykuł B. Bekkera, W. Wostokowa i Ju. Jonina, 2-адические числа, w którym omówiona jest bardziej szczegółowo metryka na zbiorze liczb 2-adycznych (druga spośród tu rozważanych), bardzo odmienna od metryk spotykanych praktycznie, oraz jedno bardzo ciekawe zadanie geometryczne związane z tą metryką. Osobny temat to rozwinięcia 2-adyczne okresowe. W podanych przykładach rozwinięć dla 1/3, 1/5, 1/9 i 1/11 okresy mają parzystą liczbę cyfr. Jeśli przepołowić taki okres, jedną połówkę nasunąć na drugą i nałożone na siebie cyfry dodać, to dostanie się same jedynki. Ułamki dziesiętne okresowe mają też taką własność, z tym że dostaje się dziewiątki; por. H. Rademacher i O. Toeplitz, *O liczbach i figurach*; wydanie polskie, Warszawa 1956, na str. 197.

Na przykład 1/7 = 0,142857142857...... i mamy

$$\begin{array}{r} 142857142857142857\ldots\ldots \\ +857142857142857142\ldots\ldots \\ \hline 999999999999999999\ldots\ldots \end{array}$$

*

Wszystkie z zamieszczonych tu rzeczy o solenoidzie są dobrze znane, a ujęcie przypomina, czasami aż nazbyt, odpowiedni rozdział z książki E. Hewitta i K. Rossa, *Abstract harmonic analysis* (tom I) *Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften* 225, Springer 1963.

Zadania

Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

M 220. Znaleźć sumę współczynników wielomianu $p(x) = (x^2-3x+2)^{73}(x^3+x-1)^{72}$.
Rozwiązanie na str. 2.

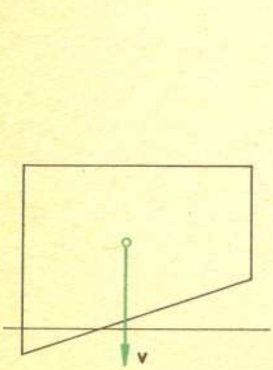
M 221. Punkt P leży wewnątrz n-kąta foremnego $A_1A_2...A_n$. Wykazać, że istnieją wierzchołki A_k i A_l takie, że $\sphericalangle A_kPA_l$ różni się od półpełnego mniej niż o π/n.
Rozwiązanie na str. 12.

M 222. Na płaszczyźnie mamy dane 100 punktów: $A_1, A_2, ..., A_{100}$. Wykazać, że na dowolnym okręgu o promieniu 1 leżącym na tej płaszczyźnie znajdzie się taki punkt B, że $A_1B+A_2B+ \ldots +A_{100}B \geqslant 100$.
Rozwiązanie na str. 7.

Redaguje dr Andrzej KRASIŃSKI

F 74. Zaproponowano kiedyś następujący sposób zmierzenia skrócenia Lorentza: 1. Sfilmować szybko jadący pociąg, 2. Puścić film w przyspieszonym tempie i sfilmować obraz z ekranu, 3. Puścić drugi film w przyspieszonym tempie i sfilmować obraz z ekranu, ...itd, aż prędkość pociągu na którymś kolejnym filmie stanie się dość duża, aby skrócenie Lorentza dało się zmierzyć. Czy rzeczywiście skrócenie Lorentza da się zaobserwować w ten sposób?
Rozwiązanie na str. 2.

F 75. Pręt o długości spoczynkowej L_0 leci wzdłuż swojej osi i przelatuje nad otworem w stole o długości $l_0 < L_0$. Prędkość pręta v jest tak duża, że wskutek skrócenia Lorentza jego długość obserwowana w układzie spoczynkowym stołu, $L_v = L_0\sqrt{1-v^2/c^2}$, jest mniejsza od l_0. Można go więc podczas lotu przeciągnąć przez otwór w stole, nie zmieniając jego kierunku. W układzie spoczynkowym pręta skrócenia Lorentza doznaje jednak otwór w stole; $l_v = l_0\sqrt{1-v^2/c^2} < l_0 < L_0$, zatem pręt nie zmieści się w otworze. Jakie jest rozwiązanie tego „paradoksu"?
Rozwiązanie na str. 6.



F 76. W pewnym układzie odniesienia U ostrze gilotyny do papieru opada w dół z taką prędkością, że punkt przecięcia linii ostrza z krawędzią pulpitu porusza się z lewej ku prawej z prędkością $V > c$ (patrz rysunek). (Punkt ten nie jest cząstką materialną, może więc poruszać się dowolnie szybko). Jak widać ze wzorów na transformację Lorentza, istnieje wtedy taki obserwator U', dla którego punkt ten porusza się w kierunku przeciwnym. Jaka jest różnica między obrazem gilotyny w ruchu widzianym przez U i widzianym przez U'?
Rozwiązanie na str. 1.