Wykreślanki

I. Napiszmy ciąg:

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, ...

czyli po prostu kolejne liczby parzyste. Usuńmy co czwartą liczbę:

2, 4, 6, 10, 12, 14, 18, 20, 22, 26, 28, 30, 34, ...

a następnie utwórzmy ciąg sum kolejnych wyrazów: 2, 2+4, 2+4+6 itd.:

2, 6, 12, 22, 34, 48, 66, 86, 108, 134, ...

Z tego ciągu usuńmy co trzecią liczbę:

2, 6, 22, 34, 66, 86, 134, 162, ...

i znów utwórzmy sumy częściowe: 2, 2+6, 2+6+22 itd.:

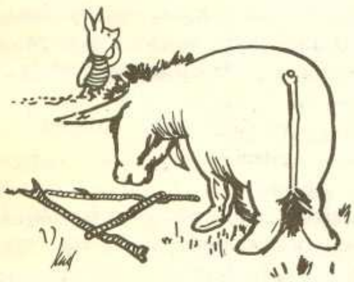
2, 8, 30, 64, 130, 216, 350, 512, ...

a teraz usuńmy co drugą liczbę:

8, 64, 216, 512, ...

Dostajemy, jak widać, sześciany kolejnych liczb parzystych. Dlaczego? A może na dalszych miejscach już tak nie będzie? A jak otrzymać w ten sposób sześciany liczb nieparzystych?

II. Podzielmy ciąg kolejnych liczb naturalnych na grupy, zaliczając do n-tej grupy n kolejnych liczb:



1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,10, 11, 12, 13, 14, 15, ...

Usuńmy co drugą taką grupę:

1, 4, 5, 6, 11, 12, 13, 14, 15, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, ...

i obliczmy sumy liczb w kolejnych grupach:

1, 15, 65, 175, ...

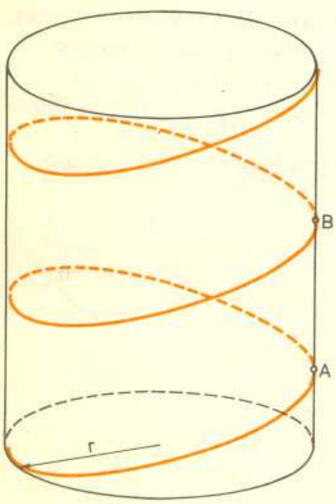
Utwórzmy teraz ciąg sum częściowych 1, 1+15, 1+15+65, ...

1, 16, 81, 256, ...

Jak widać, otrzymaliśmy ciąg czwartych potęg kolejnych liczb naturalnych. A może dalej tak nie będzie?

A jak w podobny sposób dojść np. do piątych potęg?

O wyginaniu drutu



Ściślej — jest tak, gdy o ile krzywizna i skręcenie są w pewnym przedziale równocześnie równe 0, to są stałe. Odpowiada to niezawieraniu przez krzywą odcinków — chyba że jest prostą.

Każdy zauważył, że chcąc wygiąć drut tak, aby miał żądany kształt, możemy kolejno nadawać mu ten kształt „punkt po punkcie". Tak np. prostujemy drut, robimy z niego okrąg, nadajemy mu kształt inicjału, powiedzmy.

Drut jest dość dobrym przybliżeniem krzywej. Powyższe zaś spostrzeżenie (po uściśleniu) nosi nazwę twierdzenia Freneta. A uściślenie zostało w matematyce (dokładniej: geometrii różniczkowej krzywych) przeprowadzone tak:

Ustalono sposób mierzenia, na ile dana krzywa odbiega od prostej. Tak uzyskaną wielkość nazwano *krzywizną*. Oblicza się krzywiznę dość skomplikowanie, ale porównywać krzywizny można łatwo „na oko" — im większa krzywizna, tym bardziej musielibyśmy krzywą (drut) rozginać, aby go w tym miejscu wyprostować. A więc np. okrąg ma w każdym punkcie taką samą krzywiznę.

Krzywa (drut) nie zawsze da się położyć na płaszczyźnie. Wielkość określająca, na ile krzywa jest w danym punkcie „niepłaska", nazywa się *skręceniem*. Znów obliczyć trudno, a porównywać łatwo.

Gdy ustalimy jakoś (byle jak) punkt zerowy i kierunek poruszania się po krzywej (drucie), mamy do dyspozycji dwie funkcje długości krzywej (drutu): z plusem do przodu i minusem do tyłu — krzywiznę i skręcenie. Twierdzenie Freneta orzeka, że te dwie funkcje określają jednoznacznie kształt krzywej.

Zastosujemy to twierdzenie do znalezienia odpowiedzi na pytanie, jakie krzywe ślizgają się po sobie. Tu Czytelnik może przestać czytać, by samemu znaleźć odpowiedź, a potem porównać z naszą. Krzywa (drut) może ślizgać się po sobie, jeśli jest w każdym punkcie taka sama. Czyli jeśli ma w każdym punkcie taką samą krzywiznę i takie samo (choć może różne od krzywizny) skręcenie.

Gdy krzywizna jest równa 0, otrzymujemy prostą (z definicji nawet tak nieścisłej jak nasza), a wobec twierdzenia Freneta innych krzywych o zerowej krzywiźnie nie ma.

Niech więc krzywizna będzie teraz stała, ale różna od zera, ale skręcenie niech będzie równe 0 — dobry będzie okrąg, a wobec twierdzenia Freneta...

Gdy wreszcie i krzywizna, i skręcenie są stałe, ale różne od zera, pasuje linia śrubowa, a wobec...

Ponieważ nie ma innych możliwości niż rozpatrzone, więc jedynie prosta, okrąg i śruba ślizgają się po sobie i są powszechnie z tego względu wykorzystywane w technice, która nic innego nie ma do wyboru.

Można zresztą powiedzieć, że wszystko to są śruby, tylko że czasem o przekręconym gwincie, a czasem po prostu gwoździe.