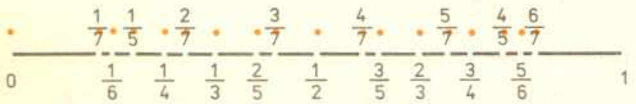
Ułamki

W to, że w znanej od dwu tysięcy lat geometrii euklidesowej można jeszcze znaleźć trudne, nowe i ciekawe twierdzenia, każdy chyba uwierzy. Trudniej uwierzyć w to, że coś nieoczywistego może być w zakresie arytmetyki ułamków. W każdym razie coś, gdzie trudności wykraczają poza kłopoty rachunkowe. W 1816 roku geolog J. Farey odkrył i rozgłosił ciekawą własność ułamków o niewielkich mianownikach. Nie był jej w stanie udowodnić, ale choć zwrócono uwagę, że już w 1802 roku dowód był opublikowany przez C. Harosa, wspomniane ułamki tworzą ciąg nazywany ciągiem Fareya.
Ciąg Fareya rzędu n (oznaczany przez F_n) to ustawiony rosnąco ciąg ułamków właściwych, których mianowniki nie przekraczają n. Na przykład F_6 składa się z 0, $\frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$, 1. Liczba wyrazów szeregu F_n rośnie szybko wraz z n (Czytelniku, jak?). F_{1025} ma 319765 wyrazów.
Odkrycie Fareya można ująć w postaci **twierdzenia**:
Jeżeli $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}$ *są kolejnymi ułamkami Fareya* (zapisanymi w postaci nieskracalnej), *to*

$$\frac{a'}{b'} = \frac{a+a''}{b+b''}.$$

Wydawane są tablice ciągów Fareya. Są one pomocne, jeżeli chcemy znaleźć dobre przybliżenie wymierne o możliwie małym mianowniku liczby z przedziału (0, 1).



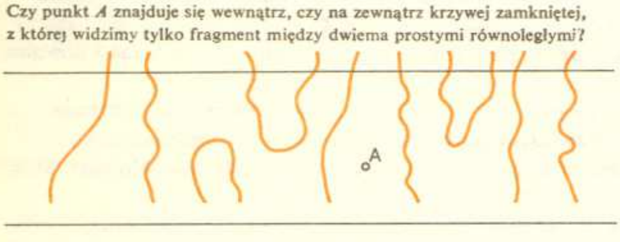
Ciąg Fareya rzędu 7

Śruba

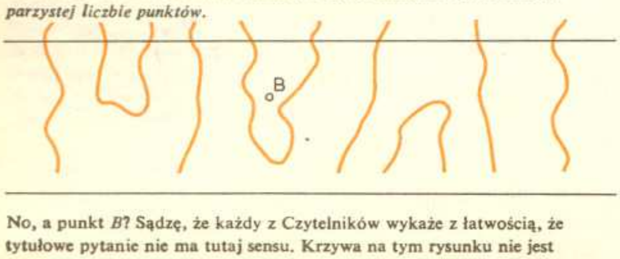
Jeżeli jakikolwiek trójwymiarowy przedmiot przeniesiemy w inne miejsce, to istnieje taka śruba, że gdyby przedmiot nasz przesuwać po jej gwincie, to znalazłby się w owym ,,innym miejscu" i tak właśnie, jak to zrobiliśmy poprzednio, położony. Warto chyba pogłowić się nad dowodem tego twierdzenia (dopuszczamy wśród śrub gwoździe i śruby z przekręconym gwintem).
Ciekawe, że dla płaszczyzny takiego uniwersalnego sposobu nie ma.

Wewnątrz, czy na zewnątrz

Czy punkt A znajduje się wewnątrz, czy na zewnątrz krzywej zamkniętej, z której widzimy tylko fragment między dwiema prostymi równoległymi?



Jeden ze sposobów stwierdzenia, że wewnątrz polega na poprowadzeniu półprostej z A całej mieszczącej się w danym pasie (a więc równoległej do brzegu). Ilość punktów jej przecięcia z krzywą jest nieparzysta — gdyby była parzysta, to punkt A leżałby na zewnątrz krzywej. Jest to wniosek z prostego w dowodzie **twierdzenia**:
Dowolna prosta niestyczna do gładkiej krzywej zamkniętej przecina ją w parzystej liczbie punktów.

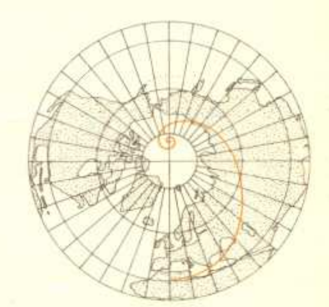


No, a punkt B? Sądzę, że każdy z Czytelników wykaże z łatwością, że tytułowe pytanie nie ma tutaj sensu. Krzywa na tym rysunku nie jest fragmentem krzywej zamkniętej.

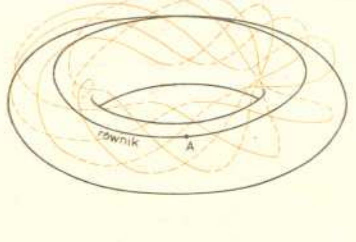
Dokąd dojdziemy idąc na północno-zachód?

Kto wierzy, że Ziemia jest płaska odpowie od razu: do nikąd (albo: do nieskończoności, lub: do krańców, co tu na jedno wychodzi), bo będziemy poruszać się po linii prostej.
Na powierzchni kuli jest inaczej. Narysujmy na niej siatkę geograficzną (mogą być tylko południki) i wyruszamy z równika, z punktu o długości geograficznej $\lambda = 0$. Leży on gdzieś w Zatoce Gwinejskiej. Pamiętając by trzymać azymut 315 lądujemy w Afryce i rychło opuszczamy ją koło Dakaru. Przepływamy Atlantyk, zahaczamy o Nową Funlandię, i skrajem Labradoru trafiamy na przylądek Foxe na Ziemi Baffina. Zostawiamy na północy biegun magnetyczny, osiągamy Wyspę Księcia Patricka i wkraczamy do Basenu Beauforta. Przekraczamy podwodny Grzebiet Mendelejewa, Basen Makarowa, Grzbiet Łomonosowa, Basen Nansena, drugi koniec ciągnącego się pod Biegunem Północnym Grzbietu Mendelejewa, i potem znów: Basen Makarowa, Grzbiet Łomonosowa, Basen Nansena ... Kręcimy się wkoło bieguna, mając go zawsze po prawej z przodu. Idziemy po krzywej zwanej loksodromą. Profesorowi Tadeuszowi Trajdosowi zawdzięczamy zwrócenie nam uwagi na błędy jakie zawierał zamieszczony w Delcie 3/1979 rysunek tej krzywej. Dziękujemy Mu, a właściwy rysunek pokazujemy obok.
Ale czy po loksodromie dojdziemy do bieguna? W zasadzie nie, bo owija się ona wokół niego nieskończenie wiele razy, chociaż ma skończoną długość (ogólnie, gdy podróżujemy pod azymutem α, to długość loksodromy od równika do bieguna jest równa promień kuli/$\cos\alpha$) i nasza stopa w końcu o biegun zahaczy ... Siatkę ,,geograficzną" możemy narysować na walcu i na stożku. Jak tam się podróżuje ze stałym azymutem?
Wiele razy opisywaliśmy torus (taką dętkę czy obwarzanek). Na nim też mamy południki i równoleżniki, a więc północ, południe i inne strony świata też. Każdy punkt torusowy ma swoją długość geograficzną λ i szerokość φ, a każdej parze kątów λ, φ z przedziału [0, 360) albo (−180, +180] odpowiada tylko jeden punkt (jakie punkty na Ziemi nie mają określonej długości geograficznej?). Torus można rozciąć, rozwinąć, chociaż nie bez zniekształceń i przedstawić w postaci prostokąta, w którym górna podstawa jest sklejona z dolną, a lewy bok z prawym. Wyruszamy z punktu $\lambda = 0$, $\varphi = 0$ w kierunku ,,pn.-zach.". Gdy równik naszego torusa ma np. 12 jednostek długości, a południk 4 — dojdziemy do punktu wyjścia dość szybko. Ale gdy południk naszej torusowej planety jest długi na pięć jednostek, odbędziemy długą drogę ABCDEFGHIJKLMNOPQRA (Rysunek). A jak będzie przy innych proporcjach długości? Zastanówmy się teraz co będzie gdy udamy się w naszą podróż na takim torusie, w którym długość równika jest niewspółmierna z długością południka. Odpowiedzi łatwo domyślić się na podstawie rozważań z poprzedniego przypadku: do punktu wyjścia nigdy nie dojdziemy, jednak co pewien czas będziemy niemal ocierać się o niego i choćbyśmy mieli jak najmniejsze stopy, zawsze na niego wejdziemy — ale nigdy środkiem stopy... Krzywa, która opisuje naszą drogę nosi w języku rosyjskim wdzięczną nazwę ,,obmotka" torusa i choć popieramy nazywanie wszystkiego po polsku, to ,,owijka" brzmi znacznie gorzej...
Czy pamiętacie, jak są owijane sznurkiem bombonierki z czekoladkami?

Loksodroma na powierzchni kuli



W rzucie powierzchni kuli na płaszczyznę styczną w biegunie loksodroma staje się spiralą logarytmiczną



Torus,

jego mapa w rzucie ,,Merkatora"

i podróż na pn.-zach.