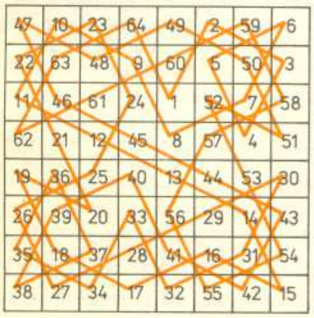
Kwadrat Wenzelidesa



Zamknięta droga konia szachowego na trzydziestopolowej szachownicy

Szachy

W końcu ubiegłego i na początku obecnego wieku niezmiernie modne były tak zwane zadania konikowe. Polegały one na tym, by ruchem konika szachowego obiec wszystkie pola szachownicy i ewentualnie w ostatnim skoku powrócić na pole wyjściowe. Zagadnieniami skoków konika po szachownicy zajmowało się bardzo wielu matematyków (najgruntowniejsze są wyniki sławnego Eulera) i amatorów (spośród tych ostatnich największą sławę zdobył Wenzelides — emerytowany urzędnik kolejowy na Morawach w połowie ubiegłego wieku). Dopiero jednak niedawno (w 1978 roku) pojawiła się pierwsza praca zawierająca kompletne rozwiązanie problemu: czy pola dowolnej szachownicy prostokątnej można obejść ruchem konika? Kiedy można znaleźć taką drogę, by z ostatniego pola przeskoczyć z powrotem na pierwsze? Oto owo proste w sformułowaniu, a niełatwe do wykazania

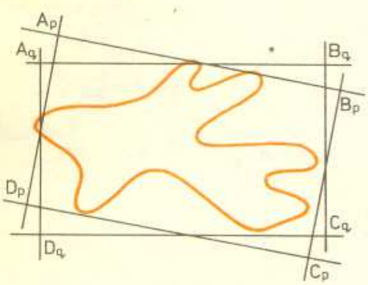
Twierdzenie: *Jeżeli obie liczby m, n są co najmniej równe 5, to szachownicę o rozmiarach $m \times n$ można obejść ruchem konika. Jeżeli liczba pól szachownicy jest parzysta, to można znaleźć taką drogę by z ostatniego pola dało się przeskoczyć na pierwsze.*

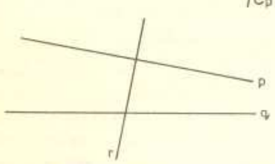
Zauważmy, że jeżeli liczba pól szachownicy jest nieparzysta, to na pewno nie można znaleźć zamkniętej drogi konikowej. A to dlatego, że przy każdym ruchu koń zmienia kolor pola ...

Na tych, którzy by jeszcze chcieli skakać konikiem po szachownicy, czeka wiele nie rozwiązanych zagadnień. Euler, Wenzelides i inni, mniej znani, próbowali zbudować konikowe kwadraty magiczne, tj. tak ponumerować pola szachownicy kolejnymi liczbami ruchem konika, by utworzył się kwadrat magiczny. Szybko zbudowano kwadraty półmagiczne (w nich suma liczb na przekątnych różni się od sumy liczb w rzędach). Wykazano, że na niektórych innych szachownicach można zbudować pełny kwadrat magiczny (16×16, 20×20, 24×24, 32×32) i że na pozostałych mniejszych od 36 nie można — z wyjątkiem właśnie zwykłej szachownicy 8×8. O niej w tej materii nic nie wiadomo. Na razie nie pomagają ani bystre umysły, ani szybkie maszyny. Konikowy kwadrat magiczny na szachownicy 8×8 nie chce wyjść.

Rozwiązanie zadania M 214

Na krzywej K można łatwo opisać prostokąt o dwóch bokach równoległych do dowolnej prostej p:





Łatwo zauważyć, że wymiary tego prostokąta zależą w sposób ciągły od kierunku tej prostej: gdy prosta q tworzy mały kąt z p, wymiary prostokątów $A_pB_pC_pD_p$ i $A_qB_qC_qD_q$ niewiele się różnią. Zauważmy teraz, że gdy prosta r jest prostopadła do p, to $A_rB_rC_rD_r = B_pC_pD_pA_p$: zamieniliśmy tylko boki prostokąta. Jeżeli więc $A_pB_p > B_pC_p$, to $A_rB_r < B_rC_r$ i pomiędzy kierunkami prostych p i r znajdzie się kierunek s taki, że $A_sB_sC_sD_s$ jest kwadratem. (Patrz „twierdzenie o kiwającym się stole").

Pochwała nieścisłości

Ścisłe prawa fizyki są w gruncie rzeczy nic niewarte. Co z tego, że potrafimy ściśle opisać oddziaływanie grawitacyjne dwu cząstek, skoro każdy realny układ grawitacyjny składa się z wielu ciał. Co z tego, że mamy ścisłe rozwiązania równań Schrödingera i Diraca opisujące atom z jednym elektronem, skoro obiekty w praktyce najważniejsze (np. kryształy półprzewodników czy rdzenie reaktorowe) składają się z wielkich zespołów atomów wieloelektronowych, do których opisu i tak trzeba tworzyć osobne formalizmy.

Ścisłość wodzi nas nawet na manowce. Na przykład rozszerzanie się Wszechświata jest opisywane prostym, ścisłym rozwiązaniem równań pola grawitacyjnego, które jednak otrzymuje się przy założeniu, że Wszechświat jest sferycznie symetryczny i jednorodny. Fakt, że obserwacje astronomiczne potwierdzają rozszerzanie się Wszechświata, i to w sposób w przybliżeniu zgodny z owym rozwiązaniem, niektórzy ludzie przyjmują jako dowód, że nasz Wszechświat jest i zawsze był jednorodny i sferycznie symetryczny. W modelu takim nie można jednak opisać np. tworzenia się galaktyk, które przecież istnieją. Aby stworzyć opis uwzględniający ten fakt, trzeba odstąpić od upraszczających założeń, czyli w rezultacie przejść do opisu przybliżonego, nieścisłego.

Większą wartość ma opis teoretyczny nakierowany wprost na wyjaśnienie zjawisk przyrody w całej ich złożoności, nawet jeśli jest on oparty o niedokładne i niekompletne dane o elementach składowych poszczególnych procesów. Na przykład na podstawie przybliżonych (uzyskanych przez ekstrapolacje z bezpośrednich pomiarów) danych dotyczących wydajności poszczególnych reakcji między cząstkami elementarnymi (przy różnych temperaturach i gęstościach materii) udało się odtworzyć w ogólnych zarysach proces powstawania wszystkich pierwiastków cięższych od wodoru. Rachunki, prowadzone na komputerach, wykazały, że w pierwszych fazach rozszerzania się Wszechświata mogą praktycznie powstać tylko jądra trzech najlżejszych pierwiastków: wodoru, helu i litu oraz ich izotopów. Po wytworzeniu litu temperatura materii jest już zbyt niska, aby reakcje mogły przebiegać dalej. Odkrycie to początkowo bardzo zmartwiło badaczy, potem jednak okazało się, że produkcja jąder cięższych pierwiastków może z powodzeniem odbywać się nieco później, we wnętrzach gwiazd, po ich utworzeniu. Testy obserwacyjne dostarczyły dalszych dowodów na taką „dwustopniową" produkcję pierwiastków. Obliczenia, wykonywane cały czas w oparciu o mało dokładne dane, pozwoliły w rezultacie wyjaśnić całkiem drobne nawet wzniesienia i luki na krzywej obrazującej zależność rozpowszechnienia danego izotopu we Wszechświecie od jego liczby masowej.

Podobnymi metodami udało się również opisać wiele skomplikowanych procesów mechanicznych, termodynamicznych i elektromagnetycznych zachodzących we wnętrzach i na powierzchniach gwiazd. Nad ścisłymi równaniami opisującymi te procesy siedzielibyśmy pewnie do dzisiaj, ciągle nic nie wiedząc, podczas gdy rachunki komputerowe pozwalają nawet wyrobić sobie pewne intuicyjne oczekiwania co do nowych wyników.

W gruncie rzeczy nie rozumiem, po co ludzie męczą się nad ścisłym rozwiązywaniem równań.