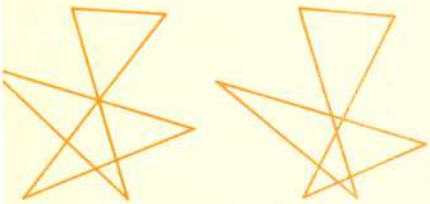
Podwójne punkty

Jeżeli punkty $A_1, A_2, \ldots, A_n$ płaszczyzny są położone tak, że żadne trzy z nich nie leżą na jednej linii prostej, to łącząc A_1 z A_2, A_2 z A_3 itd., wreszcie A_n na powrót z A_1 otrzymamy łamaną zamkniętą. Mówmy jednak na nią *wielobok*. Odcinki $\overline{A_i A_{i+1}}$ to jego boki.
Boki wielokąta wypukłego spotykają się tylko w wierzchołkach, ale dla naszych wieloboków tak być nie musi. Nazwijmy punktami osobliwymi wieloboku punkty przecięcia boków.
Wierzchołków nie zaliczamy do punktów osobliwych, choć bez wątpienia są one pewnymi punktami charakterystycznymi.
Trójkąt (nie mogłem jakoś napisać ,,trójbok") nie może mieć punktów osobliwych, a czworobok może mieć tylko jeden (albo wcale). Umówimy się rozważać tylko osobliwości proste — tj. takie, w których przecinają się tylko dwa boki. Osobliwość ,,wyższego rodzaju", taką na przykład jak na rysunku, można w pewnym sensie sprowadzić do osobliwości prostych, lekko rozsuwając wierzchołki naszego wieloboku. Zastępujemy w ten sposób osobliwy punkt — k-krotny przez $\frac{k(k-1)}{2}$ prostych punktów osobliwych.

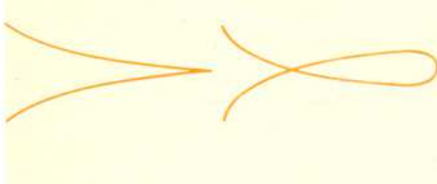


Pięcioboki mogą mieć 0, 1, 2, 3 lub 5 punktów podwójnych; a, o dziwo, nie mogą mieć ich 4.

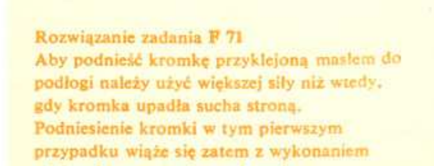
Czy umiecie to wykazać? A może ujmiecie rzecz ogólniej i udowodnicie następujące **twierdzenie Straszewicza**:

Wielobok o nieparzystej liczbie boków n może posiadać $\frac{n(n-3)}{2}$ *osobliwości prostych. Może też mieć ich mniej, ale nie* $\frac{n(n-3)}{2}-1$. *Wielobok o parzystej liczbie boków n może mieć* $\frac{n(n-4)}{2}+1$ *punktów osobliwych lub dowolną liczbę od niej mniejszą.*

Spróbujcie narysować ośmiobok o 16 punktach podwójnych. Z pewnością nie uda się to Wam od razu.



Wygładźmy teraz szpice przy wierzchołkach wieloboków i zamieńmy proste odcinki boków na łagodne łuki. Zróbmy to tak, by otrzymana krzywa miała ,,podobnie" rozmieszczone punkty samoprzecięcia. Trudne twierdzenie analizy matematycznej głosi: można to zrobić tak, by naszą krzywą dało się opisać równaniem wielomianowym $f(x, y) = 0$. Zwrot ,,można to zrobić" znaczy tutaj tyle, że krzywymi o równaniach wielomianowych można nasz wielobok przybliżać z dowolną dokładnością.
Powiemy, że punkt samoprzecięcia krzywej jest punktem podwójnym, jeżeli przechodzą przez niego tylko dwie ,,gałęzie" krzywej. Przez niewielką zmianę wielomianu opisującego krzywą możemy zawsze wszystkie punkty samoprzecięcia zastąpić przez punkty podwójne. Możemy także wygładzić ostrza.



Rozpatrujmy zatem krzywą bez ,,ostrzy" i tylko z punktami podwójnymi. Od czego zależy liczba punktów podwójnych?
Odpowiedź: Od stopnia wielomianu opisującego krzywą:
Jeżeli f jest wielomianem stopnia n to krzywa o równaniu $f(x, y) = 0$ *nie może mieć więcej niż* $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ *punktów podwójnych.*

Ten wynik jakoś łączy się z poprzednim $\left(\text{jak się ma } \frac{(n-1)(n-2)}{2} \text{ do } \frac{n(n-3)}{2}?\right)$, ale tak naprawdę to nie umiemy podać prostych i w miarę estetycznych warunków, mówiących, kiedy wielomian opisuje krzywą o takiej a takiej liczbie takich a takich punktów osobliwych. ,,Pół biedy" dla wielomianów (i krzywych) zespolonych. Geometria zespolonych tworów geometrycznych jest bardzo dobrze rozwinięta, można powiedzieć, że dziedzina zespolona jest bardziej odpowiednia dla uprawiania teorii zbiorów algebraicznych; geometria rzeczywista jest po prostu znacznie trudniejsza. A to dlatego, że równanie kwadratowe raz ma pierwiastki, raz nie ma..., a wolelibyśmy, żeby się zdecydowało.

Rozwiązanie zadania F 71
Aby podnieść kromkę przyklejoną masłem do podłogi należy użyć większej siły niż wtedy, gdy kromka upadła suchą stroną. Podniesienie kromki w tym pierwszym przypadku wiąże się zatem z wykonaniem większej pracy, a więc — kromka przyklejona masłem do podłogi ma niższą energię. Jest to zatem stan bardziej prawdopodobny, zgodnie z prawami fizyki statystycznej.