O grach i strategiach zwycięskich

Każdy, kto grywał w szachy czy warcaby, wie, że pozycję nazywamy wygraną dla jednego z graczy, jeśli ma on plan gry, który bez względu na wysiłki przeciwnika prowadzi do zwycięstwa. Taki plan nazywamy strategią zwycięską.

Są gry, w których już pozycja początkowa jest wygrana dla jednego z partnerów. Tak jest np. w grze w wilka i owce, gdzie owce mają od początku strategię zwycięską. W szachach ani w warcabach nie jest znana żadna strategia zwycięska w pozycji wyjściowej i dzięki temu obie te gry są nadal interesujące.

Poniżej opiszemy pewien rodzaj matematycznych gier dwuosobowych i na ich przykładzie sprecyzujemy pojęcie strategii zwycięskiej. Wymyślili je polscy matematycy: S. Banach i St. Mazur.

Gra toczy się na odcinku $\langle 0, 1\rangle$, w którym gracze, zanim siedli do gry, wybrali pewien podzbiór A. W pierwszym ruchu gracz I wybiera dowolny odcinek I_1, zawarty w $\langle 0, 1\rangle$, gracz II odcinek $I_2 \subset I_1$ i w dalszym ciągu gracze wybierają na przemian coraz to mniejsze odcinki. Partia trwa nieskończenie długo i w jej wyniku powstaje nieskończony, malejący ciąg odcinków $I_1 \supset I_2 \supset \ldots$. Jeśli zbiór A zawiera przynajmniej jeden punkt z części wspólnej wszystkich zbiorów I_n, wygrywa gracz I, w przeciwnym razie zwycięzcą zostaje II.

Strategia zwycięska (np. dla gracza II) ma być przepisem mówiącym, jak wykonać ruch zgodny z regułami gry w każdej chwili, gdy kolej przypada na gracza II, i to tak, by zapewnić wygraną. Gracz II wybiera odcinki o numerach parzystych. Strategia zwycięska dla II jest to więc funkcja s o następujących własnościach:

1. każdemu ciągowi odcinków takich, że $\langle 0, 1\rangle \supset I_1 \supset \ldots \supset I_{2k+1}$ przyporządkowuje odcinek $J = s(I_1, \ldots, I_{2k+1})$ taki, że $J \subset I_{2k+1}$ (zapewniliśmy zgodność z regułami),

2. dla dowolnego ciągu odcinków $I_1, I_3, I_5, \ldots$ takiego, że $I_3 \subset s(I_1)$, $I_5 \subset$ $\subset s(I_1, s(I_1), I_3, s(I_1, s(I_1), I_3))$ itd., zbiór A jest rozłączny z częścią wspólną odcinków $I_1, s(I_1), I_3$, $s(I_1, s(I_1), I_3), I_5, s(I_1, s(I_1), I_3, s(I_1, s(I_1), I_3), I_5)$ itd. (ten warunek zapewnia, że II gracz wygrywa stosując strategię s, gdy jego przeciwnik wybiera kolejno I_1, I_3, I_5 itd.).

Analogicznie definiuje się strategię zwycięską gracza I.

Oczywiście graczowi II łatwiej grać, gdy zbiór A jest „mały", bo może go łatwiej ominąć. Nietrudno znaleźć strategię zwycięską dla II, gdy A jest np. nieskończonym ciągiem $(a_1, a_2, \ldots)$. (Jaka to strategia?). Gdy zbiór A jest „duży", przewaga jest po stronie gracza I. Można wykazać, że jeśli A jest zbiorem liczb niewymiernych z przedziału $\langle 0, 1\rangle$, to I ma strategię zwycięską.

Dla obszernej rodziny zbiorów A o regularnej budowie (nie będziemy wnikać w sens tych słów), któryś z graczy — czasem I, czasem II — ma strategię zwycięską. Można jednak udowodnić istnienie zbioru — choć nie jest to takie łatwe — dla którego żaden z graczy nie ma takiej strategii. Gra jest wówczas szczególnie ciekawa, bo nabiera sensu wartościowanie ruchów (silny, słaby, zupełnie zły).

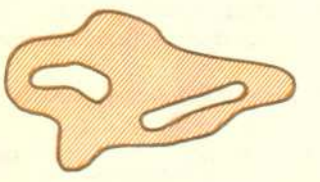
A jaki będzie wynik partii, gdy obaj gracze grają najlepiej jak mogą (jeśli rzeczywiście mogą). Bo remisu przecież w tej grze nie ma... .

Zadania

Redaguje mgr Krzysztof NOWIŃSKI

M 214. Wykazać, że na każdej krzywej zamkniętej można opisać kwadrat.
Rozwiązanie na str. 6

M 215. Na jednym z pól szachownicy 8×8 wpisano 0, na pozostałych — jedynki. W jednym „ruchu" możemy wybrać wiersz lub kolumnę i zamienić w tym wierszu lub kolumnie zera na jedynki i odwrotnie. Pokazać, że nie możemy w ten sposób otrzymać samych jedynek.
Rozwiązanie na str. 11



M 216. Brzegiem „zwykłego" płata powierzchni jest suma niezawęźlonych krzywych zamkniętych.
Czy mogą być brzegiem płata
a) krzywa zamknięta zawęźlona?
b) dwa zawęźlone okręgi?
Rozwiązanie na str. 2

Redaguje dr Andrzej KRASIŃSKI

F 72. Dlaczego upuszczona kromka chleba z masłem częściej upada stroną posmarowaną w dół?
Rozwiązanie na str. 7