Lemniskata

Jeżeli punkt wędruje po płaszczyźnie tak, że w czasie tego ruchu iloczyn odległości tego punktu od dwóch ustalonych przedtem punktów płaszczyzny jest stały, to drogą punktu jest krzywa zwana *lemniskatą* (co po grecku znaczy „wstęgopodobna").

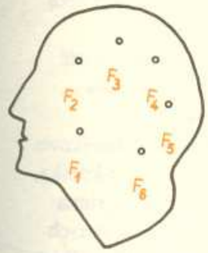
No to nazwijmy *n*-lemniskatą krzywą złożoną z punktów, których iloczyn odległości od przedtem wybranych punktów $F_1, \ldots, F_n$ jest stały. Takie lemniskaty mają całkiem różne kształty. Co więcej, każda krzywa zamknięta jest „prawie lemniskatą".

Dokładniej, ma miejsce następujące **twierdzenie**:

Dla każdej dodatniej liczby ε i dla każdej krzywej zamkniętej na płaszczyźnie istnieje n-lemniskata odległa od niej mniej niż o ε.

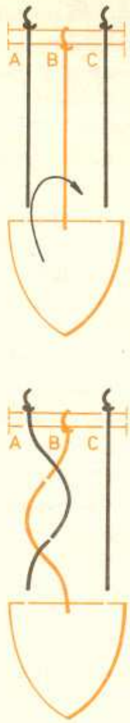
(mówimy, że dwie krzywe są odległe od siebie o mniej niż ε, jeżeli jedna z nich mieści się całkowicie w pasku o szerokości ε wokół drugiej).

Kto potrafi to udowodnić?



6-lemniskata

Węzły



Weźmy trzy cienkie sznurki równej długości i przymocujmy je z jednej strony (powiedzmy) do poręczy krzesła, a z drugiej przywiążmy coś takiego jak na rysunku. Będziemy to nazywać plakietką. Powinna ona mieć strony w różnym kolorze. Przetykając je między sznurkami otrzymujemy różne węzły. Możemy przy tym albo starać się zachować ją w nie zmienionym położeniu (stale pionowo, pomarańczową stroną do nas, ostrzem w dół), bądź zaplątywać węzeł obracając ją o 180° wokół górnego brzegu (wtedy do nas będzie zwrócona druga jej strona).

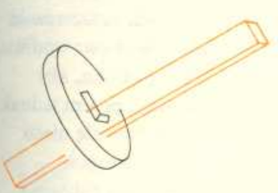
Zapłączmy więc nasze sznurki i starajmy się rozplątać węzeł. Oczywiście w tym celu wystarczy operacje supłania wykonywać po prostu w odwrotnej kolejności. A może można rozplątać węzeł nie wyjmując plakietki z płaszczyzny — czyli wykonując tylko ruchy pierwszego z opisanych typów? Niestety nie. Nie można już tego zrobić np. z węzłem powstałym przez obrócenie plakietki w przód między sznurkami *B* i *C*. Ale jeżeli zapłączemy go jeszcze raz, obracając plakietkę między dwoma innymi sznurkami — dostaniemy węzeł możliwy do rozsupłania za pomocą tylko poziomych ruchów plakietki. Nie tak trudno się o tym przekonać. Znacznie trudniej odkryć ogólne twierdzenie: jakie węzły dadzą się rozplątać w ten sposób? Oto **twierdzenie**, udowodnione przez współczesnego matematyka, Emila **Artina**: *Węzeł można rozplątać bez obracania plakietki wtedy i tylko wtedy, gdy przy jego wiązaniu plakietkę obrócono parzystą liczbę razy.*

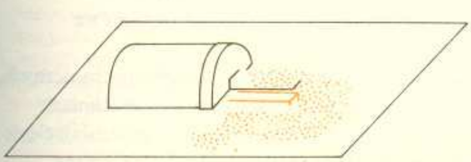
Dowód jest wcale niełatwy, a wykorzystuje bardzo obficie (właściwie wyłącznie) teorię grup. Bo przecież takie węzły tworzą grupę — ze względu na operację „supłania". Co dziś abstrakcyjne, jutro może znaleźć się w dziale „zastosowania".

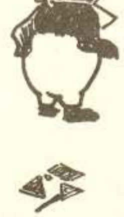
Trudno się domyślić

jak wygląda pole magnetyczne pochodzące od monopola (*mono* — jedno, *polus* — biegun) magnetycznego, tym bardziej, że ogólna opinia skłania się ku przekonaniu, iż monopole nie istnieją (w Delcie 4/1974 opisaliśmy ich odkrycie, ale był to żart primaaprilisowy). Można oczywiście próbować to wydedukować ze znanego wyglądu pola magnetycznego dipola (*di* — dwu) lub — przez analogię — sądzić, że jest ono takie, jak pole elektrostatyczne naelektryzowanej kulki.

Daleko lepiej jednak sprawdzić to doświadczalnie. Jak wiadomo z lektur o łodziach podwodnych, stalowa puszka „ekranuje" pole magnetyczne. Skoro tak, to dysponując magnesem sztabkowym, pewną ilością opiłków żelaznych i zamykaną puszką możemy obejrzeć interesujące nas zjawisko. Wycinamy mianowicie w pokrywce puszki otwór akurat na nasz magnes, wstawiając magnes w ów otwór i zamykając puszkę... No właśnie. „Wyszedł" nam monopol, czy nie? Przy pomocy opiłków da się to sprawdzić.



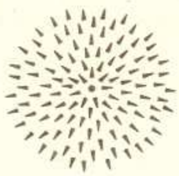




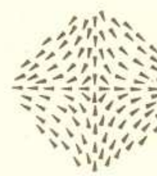
W tekturce wycinamy otwór na puszkę i wystającą część magnesu. Na tekturce rozsypujemy opiłki. I lekko potrząsamy.

Czesanie sfery

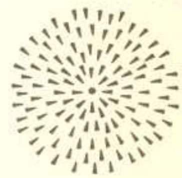
Powierzchni kuli (nazywamy ją sferą) pokrytej włosami nie można gładko zaczesać; zawsze utworzy się gdzieś:



„łysinka"



„załamanie"

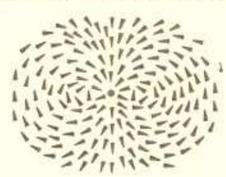


„czubek"

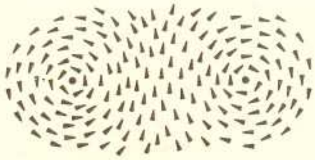
lub „wicherek".

Co ciekawsze, osobliwości takie nie mogą wystąpić samotnie: liczba „łysinek" + liczba „czubków" + liczba „wicherków" = liczba „załamań".

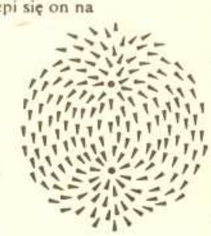
Ponadto liczba „wicherków" musi być parzysta. Można wprawdzie uczesać naszą sferę gładko poza jednym punktem, w którym będzie „wicherek podwójny",



ale przy najmniejszej niedokładności rozszczepi się on na dwa „wicherki"



lub



„łysinkę" i „czubek".

PS. W każdej chwili są na Ziemi dwa miejsca, gdzie nie wieje wiatr.