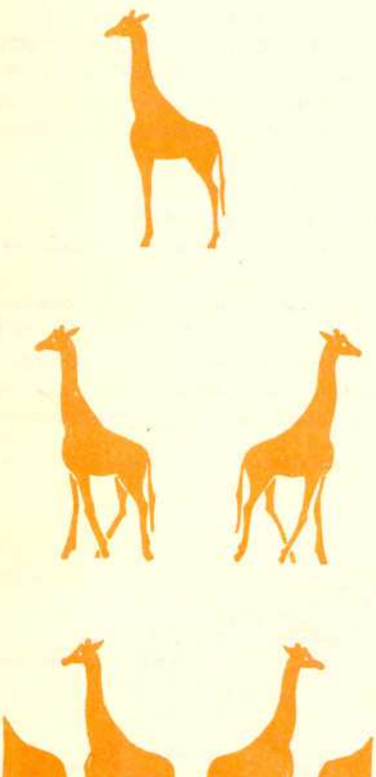
Im mniej tym lepiej

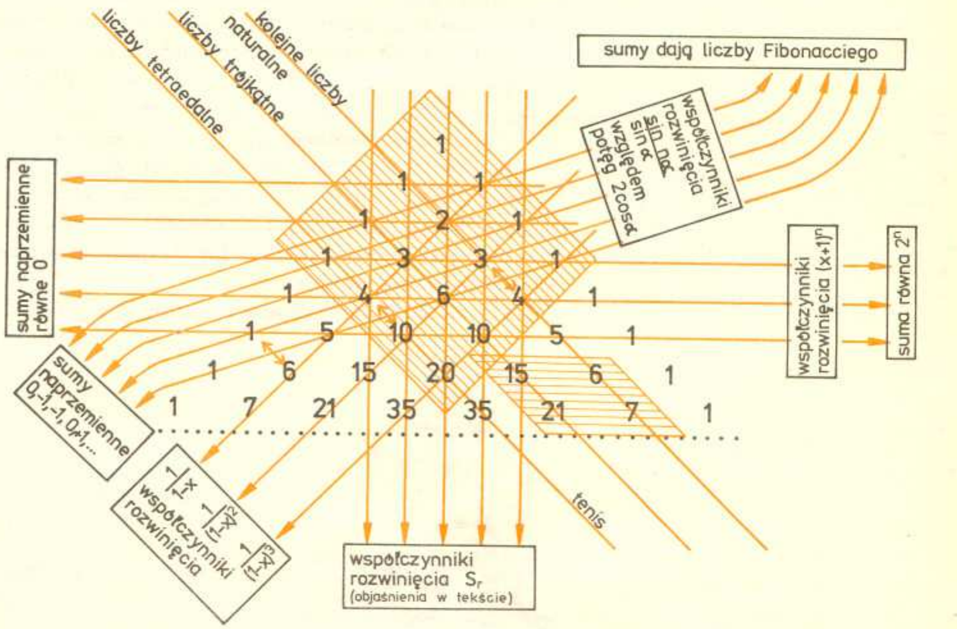
Tak można by w skrócie opisać zasadę właściwą rozmaitym układom fizycznym, mianowicie dążenie do minimum energii. Dlatego też piłka stacza się po pochyłości, wahadło beznadziejnie stara się zająć najniższe położenie, woda spływa z góry na dół. Dążenie to jest tak przemożne, że wodę można łatwo skłonić, by, w celu osiągnięcia minimum energii potencjalnej, popłynęła do góry. Rzeczywiście: tak właśnie opróżnia się np. duże akwaria. Do stojącego na stole akwarium (rybki wyłowiliśmy uprzednio i przenieśliśmy do słoja) wkładamy jeden koniec długiej gumowej rurki, zasysamy przez drugi koniec wodę i gdy już, już mielibyśmy się jej napić, kierujemy ów drugi koniec do stojącego pod stołem wiadra. I woda sama wycieka przez rurkę, aż akwarium się opróżni.

Może umiecie odpowiedzieć, skąd woda wpływająca do rurki w akwarium wie, że „potem” będzie miała niższą energię potencjalną? A jeśli nie wie, to po co tam wpływa? A może musi?



Trójkąt Pascala

Gdy chcemy podnieść $a+b$ do potęgi, dajmy na to, siódmej, korzystamy z trójkąta Pascala (regułą jego budowy jest: jedynki na bokach, a każdy inny wyraz jest sumą dwóch stojących nad nim). Potrzebne współczynniki znajdujemy w siódmym (licząc wierzchołkową jedynkę za zerowy) wierszu: 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1. Piszemy zatem $(a+b)^7 = a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+$ $+35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6+b^7$.



Czy jeszcze coś możemy zobaczyć w trójkącie Pascala? Drugi rząd ukośny zawiera (gdyby ktoś zapomniał) kolejne liczby naturalne, następny — kolejne liczby trójkątne (tj. takie, że tę ilość jednakowych monet można ułożyć w trójkąt równoboczny), dalszy — liczby tetraedralne (mówiące ile kul można ułożyć w czworościenny sąg tak, by wykorzystać wszystkie). Następny rząd ukośny wypełniony jest przez liczby określające ile czterowymiarowych kul można ustawić w czterowymiarowy odpowiednik czworościanu foremnego itd.

Te same liczby w rzędach ukośnych dają współczynniki rozwinięć $\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{(1-x)^2}$, ... na szeregi:

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots, \qquad \frac{1}{(1-x)^2} = 1+2x+3x^2+4x^3+\ldots$$

zbieżne przy $|x| < 1$.

Centralna pionowa kolumna składa się z liczb 1, 2, 6, 20, ..., a szereg $1+2x+6x^2+20x^4+\ldots$ jest rozwinięciem $S_1 = (1-4x)^{-1/2}$ $\left(\text{gdy } |x| < \frac{1}{4}\right)$. To można wykorzystać do niektórych

Można także zobaczyć kolejne współczynniki w wyrażeniach typu

$$x^7+\frac{1}{x^7}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^7-7\left(x+\frac{1}{x}\right)^5+$$
$$+\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-7\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

(należy zsumować liczby połączone krótkimi strzałkami).

Jeżeli w grze w tenisa reprezentujemy nieco inny poziom niż nasz partner, tak że prawdopodobieństwo wygrania przez nas piłki wynosi p, a przez partnera q, to prawdopodobieństwo, że wygramy gema, jest równe

$$P_g=p^4\left(1+4q+10q^2+20\,\frac{pq^3}{1-2pq}\right),$$

a że wygramy seta (Q_g to $1-P_g$):

$$P_s=P_g^6\left(1+6Q_g+21Q_g^2+56Q_g^3+\right.$$
$$\left.+126Q_g^4+252\,\frac{P_gQ_g^3}{1-2P_gQ_g}\right),$$

a co to ma wspólnego z trójkątem Pascala — chyba widać. Wzór trochę się zmieni „na korzyść", jeżeli umówimy się, że przy 6:6 obowiązuje tie-break.

Rozwiązanie zadania M 215
Na początku zabawy suma liczb na szachownicy wynosiła 63. W jednym ruchu zmieniamy tę sumę o $(8-k)-k=8-2k$, jeżeli w wybranym wierszu lub kolumnie było k jedynek. Widać więc, że suma ta będzie zawsze nieparzysta.

obliczeń. Biorąc na przykład $x=0{,}0001$ mamy $(0{,}9996)^{-1/2}=1+2\cdot 0{,}0001+6\cdot(0{,}0001)^2+$ $+20\cdot(0{,}0001)^3+70\cdot(0{,}0001)^4+\ldots$; inaczej

$$\sqrt{\frac{10\,000}{9\,996}}=\frac{100}{14\sqrt{51}}=\frac{100\sqrt{51}}{14\cdot 51}\approx 1{,}0002000600200070\ldots,$$

co daje $\sqrt{51}\approx 7{,}1414284285428499\ldots$, a to jest dokładne aż do 16 miejsca po przecinku.

Następna pionowa kolumna składa się ze współczynników rozwinięcia $S_2=\frac{1}{2x}\left((1-4x)^{-1/2}-1\right)$, następne kolejno $S_3, S_4, S_5, \ldots$,
gdzie

$$S_r+S_{r+1}=x\cdot S_{r+2}.$$

Powyższa zależność przypomina nieco związek między wyrazami ciągu Fibonacciego. Zresztą zwykły ciąg Fibonacciego można też „wydostać" z trójkąta Pascala, sumując wyrazy wzdłuż łagodnie pochyłych linii.

Te pochyłe linie zawierają również współczynniki, jakie znajdują się przy kolejnych potęgach $C=2\cos\alpha$, gdy wyrażamy przez nie $S_n=\frac{\sin n\alpha}{\sin\alpha}$ — należy tylko brać znaki na przemian.

Na przykład $S_2=C$, $S_3=C^2-1$, $S_5=C^4-3C^2+1$, $S_{11}=C^{10}-9C^8+28C^6-35C^4+15C^2-1$.

Zacieniowany na rysunku wyznacznik jest równy 1 (i jemu podobne też). Mały wyznacznik zakratkowany w prawej części diagramu jest równy 21 i wszystkie podobne wyznaczniki są równe lewej dolnej liczbie. Kto chce mieć jeszcze inne desenie geometryczne, niech napisze trójkąt Pascala do dwudziestego — trzydziestego wiersza, zamaluje na czerwono liczby niepodzielne przez 2 i spojrzy na to z daleka. Potem niepodzielne przez 3...

Wróćmy jeszcze na chwilę do siódmego wiersza trójkąta Pascala. Występujące tam liczby 7, 21, 35 tworzą ciąg arytmetyczny. W całym (nieskończonym) trójkącie Pascala takich trójek jest nieskończenie wiele, występują one w każdym k^2-2 wierszu w każdej połówce trójkąta po jednej. Pierwsze trzy z nich to

7; 21, 35	
1001, 2002, 3003	w rozwinięciu $(a+b)^{14}$,
490314, 817190, 1144066	w rozwinięciu $(a+b)^{23}$.

Ciągów geometrycznych w trójkącie Pascala (dokładniej: w jego wierszach) nie ma.

Spośród różnych uogólnień trójkąta Pascala najbardziej narzucające się jest takie: niech każda liczba w trójkącie będzie równa sumie trzech stojących najbliżej nad nią. Boki trójkąta znów niech się składają z jedynek:

							1							
						1	1	1						
					1	2	3	2	1					
				1	3	6	7	6	3	1				
			1	4	10	16	19	16	10	4	1			
		1	5	15	30	45	51	45	30	15	5	1		
	1	6	20	50	90	126	90	126	90	50	20	6	1	
1	7	27	76	160	266	357	393	357	266	160	76	27	7	1

....

Ile tu można ciekawych rzeczy zobaczyć — pozostawiamy już chętnym Czytelnikom. My podamy tylko jedną obserwację. Umieśćmy nasz trójkąt (ile go się zmieści) na szachownicy tak, by wierzchołek znalazł się np. na polu e1. Postawmy na tym polu króla. Na ile sposobów może on dostać się najszybciej do innego pola? Właśnie na tyle, jaka liczba stoi na tym polu.

Pochwała umiarkowania

Ścisłe podejście do zjawisk przyrody ma swoje wady, i ma je również podejście „praktyczne". Podejścia te mają jednak zalety, które uzupełniają się nawzajem. Pierwsze, jeśli prowadzi do konkretnych rozwiązań, pozwala nam wniknąć w przyczynowo-skutkowe łańcuchy procesów, drugie — pozwala uzyskiwać ilościowe wyniki opisujące zjawiska, których szczegółowego przebiegu nie rozumiemy i w stosunku do których pierwsze podejście jest bezsilne. Na wiedzę fizyczną składają się rezultaty uzyskane obydwoma sposobami. Byłaby ona znacznie uboższa, gdyby ją pozbawić któregokolwiek z tych składników. Styl pracy badacza jest jego cechą indywidualną, której modyfikowanie na siłę może dać fatalne skutki. Jeśli ktoś okazał się utalentowanym twórcą ścisłych teorii, to wcale z tego nie wynika, że uzyskiwałby wartościowe wyniki, gdyby go zapędzić przemocą do roboty heurystyczno-komputerowej, i vice versa. Co stąd wynika? W zasadzie banał: szanujmy cudzą pracę. Niestety, banał ten trzeba czasem przypominać...