Rozwiązanie zadania F 71

Czas, po którym sygnał z pierścienia o rozmiarach kątowych $\alpha$ (patrz rysunek) dociera do Ziemi, wynosi

$$t = \frac{r}{c} = \frac{(R^2+D^2-2RD\cos\alpha)^{1/2}}{c},$$

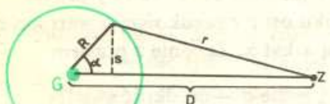
gdzie c jest prędkością światła. Promień krążka świecącego obserwowanego z Ziemi $s = R\sin\alpha$, a obserwowana prędkość rozszerzania się — $v = \frac{ds}{dt}$. Ponieważ

$$\frac{ds}{d\alpha} = \frac{ds}{dt}\cdot\frac{dt}{d\alpha}, \text{ więc } \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{d\alpha}\Big/\frac{dt}{d\alpha}.$$

Stąd

$$v = \frac{c\cos\alpha}{D\sin\alpha}(R^2+D^2-2RD\cos\alpha)^{1/2} \underset{D\gg R}{\simeq} c\,\mathrm{ctg}\,\alpha.$$

Dla $\alpha < \frac{\pi}{4}$ otrzymujemy $v > c$. Prędkość $v$ może być większa od prędkości światła, gdyż obserwowane z Ziemi rozszerzanie krążka świetlnego nie ma nic wspólnego z żadnym procesem rozszerzania się samego obłoku, a jedynie z niejednakową odległością różnych części obłoku od Ziemi.




# Względność równoczesności

## Dr Andrzej KRASIŃSKI

### Opis algebraiczny

**Niech układ odniesienia $U'$ porusza się względem układu $U$ ze stałą prędkością $\boldsymbol{v}$. Wybierzmy w $U$ i w $U'$ kartezjańskie układy współrzędnych o osiach odpowiednio równoległych, przy czym oś $x$ układu $U$ i oś $x'$ układu $U'$ mają kierunek wektora $\boldsymbol{v}$. Ustalmy, że rachubę czasu w obu układach rozpoczynamy od chwili, w której ich początki pokrywały się, tzn. zdarzenie pokrycia się początków obu układów ma współrzędne $t = x = y = z = 0$ w $U$ i $t' = x' = y' = z' = 0$ w $U'$. Dla geometrycznej interpretacji transformacji Lorentza wygodniej będzie używać współrzędnej $T = ct$ zamiast $t$ (i $T' = ct'$ zamiast $t'$), bowiem „czas" $T$ ma wtedy wymiar odległości i jest współmierny ze współrzędnymi przestrzennymi. Przy tych założeniach zdarzenie mające w $U$ współrzędne $(T, x, y, z)$ będzie miało w $U'$ współrzędne:**

$$(1)\qquad T' = \frac{T-(v/c)x}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad x' = \frac{x-(v/c)T}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z,$$

**gdzie $v$ jest współrzędną $x$ wektora $\boldsymbol{v}$, zaś c jest prędkością światła.**
**Rozważmy teraz dwa dowolne, różne zdarzenia $A$ i $B$, położone na osi $x$ układu $U$, które w układzie $U$ zachodzą równocześnie, tzn.:**

$$x_A \neq x_B$$
$$y_A = y_B, \quad z_A = z_B,$$
$$T_A = T_B = T_{AB}.$$

**Wtedy, w układzie $U'$ mamy:**

$$(2)\qquad T'_A = \frac{T_{AB}-(v/c)x_A}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad T'_B = \frac{T_{AB}-(v/c)x_B}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad T'_B - T'_A = \frac{(v/c)(x_A-x_B)}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

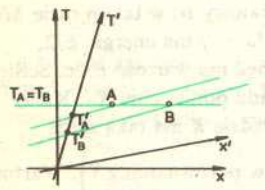
**a więc $T'_A \neq T'_B$, przy czym wartość bezwzględna różnicy $(T'_A - T'_B)$ jest tym większa, im większa jest przestrzenna odległość $|x_A - x_B|$ dwu badanych zdarzeń i im większa jest prędkość $v$.**
**Wniosek: dwa zdarzenia zachodzące w układzie $U$ równocześnie w punktach o niejednakowej współrzędnej $x$, w każdym układzie $U'$ poruszającym się względem $U$ z niezerową składową prędkości o kierunku osi $x$, zostaną zarejestrowane jako nierównoczesne.**

**Względność równoczesności jest ściśle analogiczna do zjawiska zwanego dylatacją czasu. Polega ono na tym, że odstęp czasowy między dwoma zdarzeniami $A$ i $B$ zachodzącymi w układzie $U$ w tym samym miejscu ($x_A = x_B = x_{AB}$, $y_A = y_B$, $z_A = z_B$, $T_B > T_A$) jest w układzie $U'$ inny niż w $U$. Mamy bowiem**

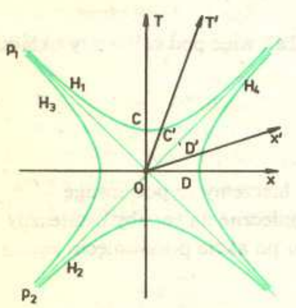
$$(3)\qquad T'_A = \frac{T_A-(v/c)x_{AB}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad T'_B = \frac{T_B-(v/c)x_{AB}}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

$$|T'_B - T'_A| = \frac{|T_B - T_A|}{\sqrt{1-v^2/c^2}} > |T_B - T_A|.$$

**Zatem obserwatorowi nieruchomemu w układzie $U'$ wydaje się, że czas w $U$ płynie wolniej niż jego czas własny.**
**Zauważmy teraz, że obserwator nieruchomy w $U$ powiedziałby dokładnie to samo o upływie czasu w $U'$. Widać to łatwo, jeśli weźmiemy transformację odwrotną do (1) i porównamy upływ czasu $T$ z upływem czasu $T'$ między zdarzeniami o współrzędnych $(T'_A, x'_{AB}, y'_{AB}, z'_{AB})$ i $(T'_B, x'_{AB}, y'_{AB}, z'_{AB})$ w $U'$ (sprawdzenie polecam Czytelnikom jako łatwe ćwiczenie). Zatem każdemu z dwu poruszających się względem siebie obserwatorów wydaje się, że czas płynie wolniej właśnie u tego drugiego.**



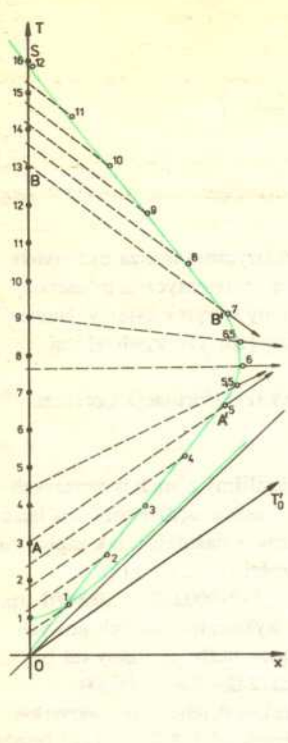

**Rys. 1. Względność równoczesności. Zdarzenia $A$ i $B$ są równoczesne w układzie $U$ (w sensie czasu $T$), lecz nie są równoczesne w układzie $U'$ (w sensie czasu $T'$).**




**Rys. 2. Wyznaczanie skal na osiach. Jeśli odcinek $OC$ przyjmiemy za jednostkę czasu na osi $T$, to hiperbola $H_1$ dana równaniem $T^2-x^2 = 1$ wyznaczy jednostkowy odcinek czasu na wszystkich innych osiach czasowych przechodzących przez punkt $O$ (odpowiadających układom $U'$ poruszającym się względem $U$ ruchem jednostajnym w kierunku osi $x$). Podobnie, jeśli $OD$ jest jednostką odległości na osi $x$, to hiperbola $H_4$ dana równaniem $T^2-x^2 = -1$ wyznaczy jednostkę odległości na wszystkich osiach $x'$ przechodzących przez punkt $O$. Proste $p_1$ i $p_2$ są asymptotami hiperbol $H_1$, $H_2$, $H_3$ i $H_4$.**

Wiąże się z tym tzw. paradoks bliźniąt. Gdyby jednego z braci bliźniaków wysłać w daleką podróż z dużą prędkością, a drugiego pozostawić na Ziemi, to po powrocie podróżnik okazałby się młodszy od swojego brata. Ale, z pozoru, podróżnikowi powinno wydawać się, że to jego bliźniak na Ziemi starzeje się wolniej. Kto ma rację?

Sekret polega na tym, że aby wrócić na Ziemię, podróżujący bliźniak musi najpierw wytracić całą swoją prędkość, a następnie nadać sobie dużą prędkość przeciwnie skierowaną. Nie może więc poruszać się cały czas ruchem jednostajnym, a wobec tego, podczas doznawania przyspieszeń, przestaje być równouprawniony w sensie transformacji Lorentza ze swoim bratem na Ziemi: jego układ spoczynkowy nie jest wówczas układem inercjalnym. W rezultacie bliźniak podróżujący jest po zakończeniu podróży młodszy obiektywnie, tzn. obydwaj bracia zgodzą się na ten sam wniosek w tej sprawie. Można to wykazać ścisłym rachunkiem, który nie jest elementarny, ale można też łatwo zilustrować rysunkami (patrz dalej).




Rys. 3. „Historia podróży" obserwowana przez podróżującego bliźniaka. Zaznaczone punkty odcinają kolejne jednostki czasu (lata) na osi $T$ i na linii przedstawiającej ruch podróżnika. Niejednakowa długość odcinków na krzywej części toru wynika z nieizometryczności przestrzeni euklidesowej (płaszczyzny rysunku) z czasoprzestrzenią (patrz tekst). Małe strzałki i linie przerywane oznaczają chwilowe kierunki osi $x'$ (linie stałego czasu $T'$) w układzie spoczynkowym podróżującego bliźniaka. Na krzywym odcinku toru, a więc podczas doznawania przyspieszeń, podróżnik obserwuje przyspieszony upływ czasu u swojego spoczywającego brata: w punkcie $A$, równoczesnym z $A'$ w sensie czasu $T'$, dla $U'$ upłynęło 5 lat, gdy dla $U$ — tylko 3. W punkcie $B$, równoczesnym z $B'$ w sensie $T'$, dla $U'$ upłynęło 7 lat, gdy dla $U$ już 13.

## Opis geometryczny

Posługując się interpretacją geometryczną transformacji Lorentza (1) musimy pamiętać, że rysujemy na płaszczyźnie kartki, która jest przestrzenią euklidesową, osie współrzędnych dwuwymiarowej czasoprzestrzeni, która jest nieeuklidesowa, bowiem odległość dwu punktów o współrzędnych $(T_1, x_1)$ i $(T_2, x_2)$ jest w niej dana wzorem:

$$(T_1-T_2)^2-(x_1-x_2)^2 = (T_1'-T_2')^2-(x_1'-x_2')^2, \tag{4}$$

zaś na płaszczyźnie kartki odległość jest dana przez:

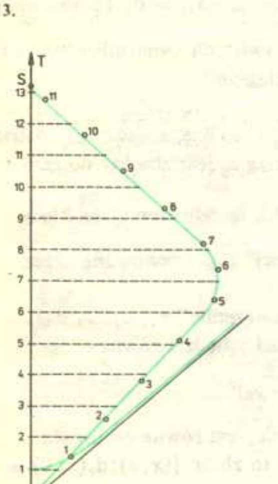
$$(T_1-T_2)^2+(x_1-x_2)^2 \neq (T_1'-T_2')^2+(x_1'-x_2')^2.$$

Rysunkowe przedstawienie transformacji Lorentza nie oddaje więc dokładnie relacji metrycznych między układami $U$ i $U'$.

Dwa zdarzenia $A$ i $B$ są równoczesne w układzie $U$, gdy leżą na jednej prostej równoległej do osi $x$ (rys. 1), ponieważ mają wtedy tę samą współrzędną czasową $T_A = T_B$. Wówczas jednak ich współrzędne czasowe w układzie $U'$ są różne, bowiem punkty o stałej wartości współrzędnej $T'$ leżą na prostych równoległych do osi $x'$.

Aby przedyskutować paradoks bliźniąt, musimy najpierw wyskalować rys. 1. Zauważmy w tym celu, że równanie $T^2-x^2 = 1$ przedstawia parę hiperbol $(H_1, H_2)$ na rys. 2, zaś równanie $T^2-x^2 = -1$ parę hiperbol $(H_3, H_4)$. Punkt $C$ o współrzędnych $(T, x) = (1, 0)$, wyznaczający jednostkę czasu na osi $T$, leży na $H_1$, zaś punkt $D$ o współrzędnych $(T, x) = (0, 1)$, wyznaczający jednostkę odległości na osi $x$, leży na $H_4$. Ponieważ równanie $T^2-x^2 = \text{const}$ jest niezmiennicze względem transformacji Lorentza (patrz równość (4)), punkty o współrzędnych $(T', x')$ spełniających równanie $T'^2-x'^2 = \pm 1$ będą leżały odpowiednio na tych samych hiperbolach. Zatem hiperbole $H_1$ i $H_4$ wyznaczają na rys. 2 także jednostkę czasu na osi $T'$ i jednostkę odległości na osi $x'$. Jeśli więc jednostką czasu na osi $T$ jest odcinek $OC$, to na osi $T'$ jednostką czasu jest odcinek $OC'$, przy czym, w sensie geometrii czasoprzestrzeni, $OC = OC' = 1$.

Paradoks bliźniąt można teraz łatwo objaśnić na rysunkach (rys. 3 i 4).




Rys. 4. Ta sama sytuacja, co na rys. 3, opisywana przez bliźniaka spoczywającego. Dla niego czas w $U'$ płynie systematycznie wolniej niż w $U$. Obaj bliźniacy uczynią w punkcie spotkania $S$ to samo spostrzeżenie: mniej czasu upłynęło dla tego brata, który podróżował.

## Jak można to sprawdzić

Istnieje proste doświadczenie, które demonstruje bezpośrednio spowolnienie upływu czasu w poruszającym się układzie. Wśród cząstek elementarnych większość stanowią cząstki nietrwałe, które po pewnym czasie rozpadają się na cząstki o mniejszej masie. Dla pojedynczej cząstki nie można przewidzieć, jak długo będzie istniała, lecz dla dużego zespołu cząstek można z bardzo dużą ścisłością stwierdzić, po jakim czasie ich liczba spadnie do połowy początkowej wartości. Czas ten, podzielony przez ln 2, nazywa się umownie średnim czasem życia cząstki nietrwałej.

Dla większości cząstek czas ten jest bardzo krótki, np. dla mionu wynosi on $2{,}3 \cdot 10^{-6}$ s. Zatem, gdyby nie spowolnienie czasu, mion poruszający się z prędkością światła $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/s, a więc z maksymalną możliwą, mógłby przebyć średnio drogę $6{,}9 \cdot 10^4$ cm = 690 m przed rozpadem. Miony powstają w górnych warstwach atmosfery ziemskiej przy zderzeniach cząstek promieniowania kosmicznego z cząsteczkami atmosfery. Gdyby każdy mion mógł przebyć tylko tak małą drogę średnią, nie moglibyśmy ich obserwować w laboratoriach na powierzchni Ziemi. Mimo to, detektory na powierzchni Ziemi rejestrują znaczne ilości mionów powstających wiele kilometrów wyżej. Po prostu cząstki promieniowania kosmicznego o wielkiej energii wytwarzają miony poruszające się tak szybko, że opisane wyżej spowolnienie czasu ,,odmładza" je względem nas i pozwala im dolecieć aż do powierzchni Ziemi przed rozpadem. Efekt ten ujawnia się również w olbrzymiej liczbie doświadczeń z nietrwałymi cząstkami sztucznie wytwarzanymi w akceleratorach, które także przebiegają przed rozpadem drogi o wiele dłuższe, niż mogłyby przebiec, gdyby nie działał efekt dylatacji czasu.