Skrócenie długości

Pomiar długości sztaby polega na r ó w n o c z e s n y m zmierzeniu współrzędnych jej końców. Jeśli sztaba spoczywa względem pewnego układu odniesienia, to równoczesność pomiarów przeprowadzanych w tym układzie nie ma oczywiście żadnego znaczenia. Łatwo jednak wyobrazić sobie, że nierównoczesne wyznaczanie współrzędnych obu końców sztaby poruszającej się może dać długość zupełnie dowolną, a nawet zamienić kolejność tych końców. Dlatego długość definiujemy przez pomiary wykonane równocześnie. Ma to szczególne znaczenie w teorii względności, w której równoczesność zdarzeń odległych przestrzennie zachodzi tylko w jednym układzie odniesienia. Równoczesny pomiar współrzędnych końców sztaby może być wykonany za pomocą sieci zsynchronizowanych zegarów umieszczonych gęsto na drodze tej sztaby. Każdy inny, na przykład fotograficzny, rodzaj pomiaru wymaga wprowadzenia odpowiednich poprawek.

Niech więc sztaba porusza się z prędkością v wzdłuż osi x pewnego układu U. W układzie odniesienia U' związanym ze sztabą współrzędne jej końców oznaczymy przez x_1' oraz x_2'. Stąd długość sztaby nieruchomej wynosi $L_0 = |x_1'-x_2'|$.
Początki obu układów współrzędnych wybieramy tak, że dla $x = t = 0$ mamy $x' = t' = 0$.
W układzie U współrzędne końców sztaby w pewnej chwili t wynoszą x_1 oraz x_2, skąd długość $L = |x_1-x_2|$.
Korzystając z transformacji Lorentza (patrz artykuł A. Szymachy) możemy wyrazić współrzędne x_1' oraz x_2' poprzez x_1, x_2, oraz t

$$x_1' = \frac{x_1-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad x_2' = \frac{x_2-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

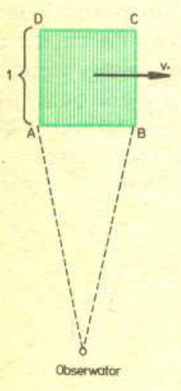
(to samo t!), skąd otrzymujemy

$$L = L_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

Długość poruszającego się pręta ulega skróceniu w kierunku ruchu i dla $v \to c$ dąży do zera.

Oczywiście odpowiedni pomiar długości pręta, spoczywającego w układzie U, wykonany z układu U' wykaże takie samo skrócenie. Można to wszystko przeanalizować także na rysunkach czasoprzestrzennych (patrz artykuł A. Krasińskiego), co pozostawiamy jako ćwiczenie dla Czytelnika. W kierunku prostopadłym do kierunku ruchu pręt się nie zmienia.

Co się jednak stanie, gdy pręt poruszający się prostopadle (w kierunku osi y) do swej długości z prędkością v względem pewnego układu U będzie obserwowany z rakiety U' poruszającej się względem U w kierunku równoległym do pręta (wzdłuż osi x) z prędkością V. Tak obserwowany pręt będzie n a c h y l o n y do osi x' układu U' związanego z rakietą. Różne bowiem współrzędne x' zmierzone wzdłuż pręta w tej samej chwili t_0' odpowiadają różnym chwilom t w układzie U. Dla różnych czasów t odpowiednie elementy pręta przebędą różną drogę $v \cdot t$ w kierunku $y = y'$. Ponieważ na pręt nie działa żadna siła, więc zasada względności upewnia nas, że nie zostanie on zgięty, a jedynie nachylony. Można to wykazać bezpośrednim rachunkiem, korzystając z transformacji Lorentza w kierunku osi x.



Na koniec zastanówmy się, jak w szczególnej teorii względności wyglądają nierównoczesne obserwacje fotograficzne. Niech sześcian o boku jednostkowym (zmierzonym w układzie związanym z sześcianem) porusza się w dużej odległości od obserwatora (patrz rysunek) z prędkością v. Obserwacja jest wykonywana fotograficznie (w krótkim czasie) w chwili gdy sześcian jest najbliżej (nad głową). Równoczesny pomiar z punktu odległego od sześcianu nie jest oczywiście równoczesny z punktu widzenia siatki z zegarów, którą mija sześcian, gdyż światło wysłane z punktu D musi przejść dłuższą drogę niż światło z punktu A i na to by dojść do obserwatora w tej samej chwili musi zostać wysłane wcześniej. Wcześniej o $t = \frac{1}{c}$. Ale w tym czasie sześcian przesunie się na odległość $\frac{v}{c}$, co spowoduje, że boczna ściana sześcianu (AC) będzie widziana nie prostopadle nad głową, ale nachylona tak, że jej rzut wyniesie $\frac{v}{c}$. Stąd kąt nachylenia $\alpha = \arcsin(v/c)$. Równocześnie ściana sześcianu równoległa do kierunku ruchu (AB) ulegnie skróceniu do wartości $\sqrt{1-v^2/c^2}$, co może być również interpretowane jako nachylenie pod pewnym kątem. Korzystając ze związku $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-v^2/c^2}$, łatwo wykazać, że kąt ten jest równy kątowi nachylenia ściany bocznej. Sześcian uległ więc pozornemu obróceniu (bez deformacji). Pozostawiamy Czytelnikowi odpowiednią analizę fotograficzną innych poruszających się brył.