O transformacji Lorentza pozbawionej sensu (fizycznego)

Mgr Krzysztof NOWIŃSKI

Nikt nie śmie wątpić w to, że matematyczne opisy rzeczywistości fizycznej muszą być oparte na analizie i arytmetyce zbudowanej na liczbach rzeczywistych, że matematyczna przestrzeń trójwymiarowa R^3 jest właściwą idealizacją przestrzeni, w której my wszyscy żyjemy. Nawet pieśń gminna głosi ,,Oj dana, dana, nie ma szatana, a świat realny (tzn. rzeczywisty) jest poznawalny".

Jasne jest więc, że poniższa próba opisu czegoś tak fizycznego jak transformacja Lorentza w innej arytmetyce jest całkowicie bezsensowna.

Otóż:

Dla celów teorioliczbowych zbudowano tzw. liczby p-adyczne (pisaliśmy o nich w numerach 9/1978 i 8/1979). Najkrótszy ich opis wygląda mniej więcej tak: Niech p będzie ustaloną liczbą pierwszą (powiedzmy 3). Wprowadzimy liczby naturalne p-adyczne wyjaśniając, jak zapisywać je w systemie p-tkowym: po prostu oprócz liczb skończonej długości (1, 2, 10, 112100, 121212121212) dopuścimy do konkurencji zapisy nieskończone: ...11210002121, ...000001 itp. Zwykłe algorytmy ,,pisemnego" dodawania i mnożenia są łatwo wykonalne na tych nowych ,,liczbach". Następnie, jako miłą niespodziankę, zauważmy, że takie liczby możemy też bez ograniczeń odejmować. Na przykład $0-1 = \ldots 222222$ — bo $\ldots 222222+1 = \ldots 00000$ (przypominamy, że rachujemy w systemie p-tkowym). Możemy także dzielić przez wszystkie liczby względnie pierwsze z p — w naszym przykładzie z 3. Na przykład $1/2 = \ldots 11112$ (można sprawdzić przez pomnożenie!), $1/21 = \ldots 122011$ (1/21 w układzie trójkowym to 1/7 w dziesiątkowym).

Wobec tego pozostaje nam jeszcze uzupełnić nasze ,,liczby" o ułamki postaci $\frac{a}{p^k}$, gdzie a jest liczbą p-adyczną opisanej już postaci (zwaną ,,naturalną"). W tym celu zauważmy, że p-adyczna liczba naturalna zakończona k zerami dzieli się przez p^k, i ustalmy definicję ostateczną:

Liczba p-adyczna jest tworem postaci $p^k a$, gdzie k jest zwykłą liczbą całkowitą, natomiast a jest p-adyczną liczbą naturalną postaci $\ldots a_4a_3a_2a_1a_0 : a_0 \neq 0$ (wszystkie cyfry p-adyczne spełniają warunek $0 \leqslant a_i < p$).

Jak rachować na takich liczbach, już wiemy. Znamy zatem ich arytmetykę. Do uprawiania analizy (czy to rzeczywistej, czy zespolonej, czy p-adycznej) potrzebne jest najpierw pojęcie wartości bezwzględnej — służące potem do określenia odległości. ,,Wartość bezwzględną" liczby p-adycznej określa się wzorem $|p^k a|_p = p^{-k}$ i przyjmuje się dodatkowo, że $|0|_p = 0$. Liczbami ,,bliskimi 0" są zatem liczby podzielne przez wysokie potęgi p, tj. mające na końcu dużo zer. Ogólnie, o odległości dwu liczb p-adycznych decyduje, ile takich samych cyfr mają na końcu. Teraz możemy w zbiorze liczb p-adycznych (oznaczamy go przez $\hat{Q}_p$) wprowadzić pojęcie zbieżności, przyjmując, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n - x|_p = 0$. Tę ostatnią granicę rozumiemy oczywiście w sensie zbieżności ciągu liczb rzeczywistych. Nietrudno sprawdzić, że działania arytmetyczne na liczbach p-adycznych są operacjami ciągłymi.

,,Zwykła" liczba naturalna n da się zapisać jako $a_k p^k + a_{k-1} p^{k-1} + \ldots + a_1 p + a_0$, gdzie $0 \leqslant a_i < p$ są ,,p-tkowymi" cyframi jej rozwinięcia.

Wystarczy dzielić ,,od tyłu":

$$\begin{array}{r}
\ldots 0001 : 21 = \ldots 22011 \\
\underline{21} \\
\ldots 221 \\
\underline{21} \\
\ldots 22 \\
\underline{102} \\
\ldots 212 \\
\ldots\ldots
\end{array}$$

pamiętając, że liczymy w układzie trójkowym.

$p^k \cdot a + p^l \cdot b = p^m(p^{k-m}a + p^{l-m}b)$, $m = \min(k, l)$, wtedy $p^{k-m}a$ i $p^{l-m}b$ są już ,,liczbami naturalnymi". Po wykonaniu dodawania wyłączamy przed nawias najwyższą możliwą potęgę p. Podobnie postępujemy przy odejmowaniu.

$$(p^k a)\cdot(p^l b) = p^{k+l}(a\cdot b),$$
$$p^k a / p^l b = p^{k-l}(a/b).$$

Własności $|a|_p$ są niemal analogiczne do własności zwykłej wartości bezwzględnej: $|-a|_p = |a|_p$, $|0|_p = 0$, $|1/a|_p = 1/|a|_p$, $|ab|_p = |a|_p|b|_p$ i tylko zamiast $a+b|_p \leqslant |a|_p + |b|_p$ mamy więcej: $|a+b|_p \leqslant$ $| \leqslant \max(|a|_p, |b|_p)$.

Mamy więc wszystko, czego potrzeba, aby zacząć uprawiać algebrę i analizę, a nawet geometrię p-adyczną. Napotkamy tak wiele zabawnych własności (np. jeżeli ciąg a_n jest zbieżny do zera, to szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny; każdy trójkąt jest równoramienny itd.), że odłóżmy to na kiedy indziej, a zamiast tego zabawmy się w p-adyczną ,,teorię względności" zaproponowaną przez Stanisława Ulama i C. J. Everetta w 1966 roku.

Opiszmy jak zwykle przestrzeń zdarzeń przez jej współrzędne ,,przestrzenne" $x_1, x_2, x_3 \in \hat{Q}_p$ i ,,czas" t, również p-adyczny. Odległość ,,przestrzenna" punktów x i y będzie równa

$$d_p(x, y) = \sqrt{|(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2|_p},$$

co, jak łatwo (łatwiej, niż się wydaje na pierwszy rzut oka) sprawdzić, jest równe po prostu $\max(|x_1-y_1|_p, |x_2-y_2|_p, |x_3-y_3|_p)$. Oczywiście ,,stożek świetlny" to zbiór $\{(x, t) : d_p(x, 0) = |t|_p\}$.

Teraz możemy już określić ,,p-adyczne transformacje Lorentza" jako (jakżeby inaczej) te przekształcenia liniowe ,,czasoprzestrzeni", które zachowują stożek świetlny. Łatwo sprawdzić, że wszystkie ,,obroty przestrzenne" (czyli takie przekształcenia liniowe ,,czasoprzestrzeni", które nie zmieniają czasu ani odległości przestrzennych) są transformacjami Lorentza i że przestrzeń jest jednorodna ze względu na takie przekształcenia (tzn. jeżeli $d_p(x, 0) = d_p(y, 0)$, to x można przeprowadzić na y pewnym ,,obrotem przestrzennym").

Jednostki ,,odległości" i ,,czasu" dobraliśmy tak, by prędkość światła była równa 1.

Normą p-adycznego wektora A, oznaczoną przez $|A|_p$, nazywamy odległość $d(A, 0)$.

Niespodzianki zaczną się, gdy będziemy oglądać transformacje czasoprzestrzenne, które mają postać

$$T(x_1, x_2, x_3, t) = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_1 t \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2 t \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + b_3 t \\ c_1 x_1 \ + c_2 x_2 \ + c_3 x_3 \ + dt \end{bmatrix}$$

lub krócej

$$T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 & d \end{bmatrix}$$

lub jeszcze krócej, symbolicznie

$$T = \begin{bmatrix} A & B \\ C & d \end{bmatrix},$$

gdzie znaczenia A, B, C i d łatwo się domyślić.
Można mianowicie wykazać, że T jest postaci $d \cdot T'$, gdzie d jest tylko wspólną zamianą jednostek miary czasu i odległości, a $T' = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & d \end{bmatrix}$, przy czym $|B'|_p \leqslant 1$, $|C'|_p < 1$, a gdy $|x'|_p = 1$, to $|A'X + B'|_p = 1$. Drogą prostych rachunków można stąd wyprowadzić nieco zaskakujące wnioski: otóż p-adyczne transformacje Lorentza zachowują odległości przestrzenne i odstępy czasu! Inaczej: p-adyczna „mechanika relatywistyczna" jest zwykłą mechaniką „galileuszowską". I jeszcze coś: jeżeli $|B'|_p = 1$, to mamy transformację układów poruszających się względem siebie z prędkością 1 — czyli prędkością światła. Możemy zatem obserwować sobie p-adyczny świat z punktu widzenia fotonu!

Mam nadzieję, że bezsensowność takich wniosków pogłębiła u Czytelników przekonanie o całkowitej niesłuszności pomysłu zajmowania się tak dziwnymi tworami jak p-adyczna teoria względności.

Gdy w chwili t'_0 obserwujemy dwa punkty X'_1, X'_2, obserwowane w innym układzie współrzędnych jako X_1 i X_2, mamy:

$$X'_2 = AX_1 + Bt_1, \quad X'_2 = AX_2 + Bt_2,$$
$$CX_1 + dt_1 = t'_0 = CX_2 + dt_2,$$

skąd

$$X'_2 - X'_1 = A(X_2 - X_1) + B(t_2 - t_1) =$$
$$= A(X_2 - X_1) + \frac{1}{2} B \times C(X_2 - X_1) =$$
$$= d(A_1(X_2 - X_1) + B_1 \times C_1(X_2 - X_1)).$$

Ale $|B_1|_p < 1$, $|C_1|_p < 1$ (ponieważ T jest właściwą transformacją Lorentza, czyli prędkość względna jest mniejsza od 1), natomiast A_1 jest obrotem, więc

$$|X'_2 - X'_1|_p = |d|_p |A_1(X_2 - X_1) + B_1 \times C_1(X_2 -$$
$$- X_1)|_p = |d|_p |A_1(X_2 - X_1)|_p =$$
$$= |d|_p |X_2 - X_1|_p$$

gdy nie zmieniamy jednostki miary ($d = 1$)

$$|X'_2 - X'_1|_p = |X_2 - X_1|_p.$$

Gdy teraz $t = t_2 - t_1$ jest odstępem czasu między dwoma zdarzeniami w miejscu x w przestrzeni a t'_2 i t'_1 będą chwilami obserwacji tych zdarzeń w nowym układzie, to

$$t'_2 - t'_1 = CX_0 + dt_2 - (CX_0 + dt_1) = d(t_2 - t_1)$$

i wobec tego $|t'_2 - t'_1|_p = |t_2 - t_1|_p$.
A wszystko to wynika oczywiście z mocnego warunku addytywności

$$|a + b|_p = \max(|a|_p, |b|_p)!$$

Zadania

Redaguje mgr Krzysztof NOWIŃSKI

M 211. Niech m będzie ustaloną liczbą naturalną, różną od 1. Wykazać, że nie istnieje wielomian p, przyjmujący dla każdej liczby naturalnej n wartość $p(n) = \mathrm{NWW}(m, n)$.
Rozwiązanie na str. 3

M 212. Wykazać, że stopień wielomianu p takiego, że $p(k) = 2^k$ dla $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, nie może być mniejszy niż n.
Rozwiązanie na str. 2

M 213. Znaleźć wszystkie funkcje $f: N \times N \to N$ (N oznacza zbiór liczb naturalnych) spełniające następujące warunki 1–3:
(1) $f(x, x) = x$,
(2) $xf(x+y, y) = (x+y)f(x, y)$,
(3) $f(x, y) = f(y, x)$.
Rozwiązanie na str. 2

Redaguje dr Halina ABRAMOWICZ

F 71. Gwiazdę otacza sferyczny obłok pyłu. Pył pochłania docierające do niego promieniowanie gwiazdy i, praktycznie natychmiast, wysyła we wszystkich kierunkach promieniowanie wtórne (świeci). Z Ziemi obserwuje się rozbłysk gwiazdy znajdującej się w środku obłoku. Jaką prędkość rozszerzania się krążka świetlnego zobaczy astronom na Ziemi? Przyjmujemy, że gwiazda znajduje się w odległości znacznie większej od promienia obłoku.
Rozwiązanie na str. 10