Najogólniejsza transformacja współrzędnych i czasu

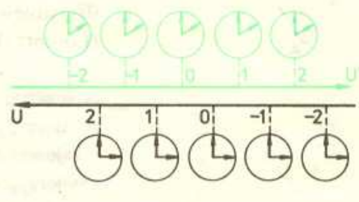
Doc. dr Andrzej SZYMACHA

Transformację Lorentza, będącą osnową szczególnej teorii względności, można wyprowadzić na wiele sposobów. Sam Lorentz znalazł ją jako pewne pomocnicze przekształcenie zmiennych zachowujące równania Maxwella w niezmienionej postaci — nie przypisywał jej zresztą realnego znaczenia. Einstein w swoim wyprowadzeniu oparł się na dwóch postulatach — zasadzie względności i niezależności prędkości światła od ruchu źródła. Istota pracy Einsteina polegała na nadaniu transformacji Lorentza realnego sensu; występujące w transformacji zmienne x' i t' mają sens współrzędnej i czasu mierzonego przez obserwatora posługującego się nowym układem U'. Einstein ponadto zapostulował niezmienniczość wszystkich praw przyrody (z wyjątkiem praw grawitacji, dla której stworzył potem tzw. ogólną teorię względności) względem tej nowej transformacji, czyli rozszerzył równoprawność różnych układów inercjalnych do formułowania wszelkich praw fizyki. Postulat stałej prędkości światła budzi jednak najwięcej oporów psychologicznych u tych, którzy po raz pierwszy spotykają się z teorią względności, i dlatego warto zbadać, jak daleko można zajść w teoretycznej analizie związków między wynikami pomiarów współrzędnych i czasu w dwóch różnych układach, nie korzystając z tego postulatu, a jedynie z prostszego założenia o całkowitym równouprawnieniu dwóch dowolnych inercjalnych układów odniesienia, równouprawnieniu dotyczącym wszelkich wypowiedzi odnoszących się do tych najbardziej fundamentalnych wielkości fizycznych, jakimi są położenie i czas.

Samo sformułowanie powyższego założenia zawiera szereg zwrotów implikujących pewne założenia, oznaczających, że będziemy posługiwali się językiem fizyki. A więc zakładamy słuszność I zasady dynamiki (które definiuje, co to jest układ inercjalny), zakładamy, że nie nastręcza wątpliwości, co to jest zdarzenie, oraz że wiemy, jak w danym układzie odniesienia mierzyć jednoznacznie współrzędne przestrzenne zdarzenia oraz jego współrzędną czasową. Zakładamy, że istnieje możliwość sformułowania słowami, co to jest wzorzec jednostki długości i jak zbudować zegar „tykający" co 1 jednostkę czasu. Ponieważ za chwilę będziemy rozważać różne układy odniesienia będące we względnym ruchu więc aby móc w pełni wykorzystać ich równoprawność, będziemy przyjmowali, że obserwatorzy związani z tymi układami posługują się identycznie brzmiącymi receptami dla zbudowania wzorców spoczywających w ich układach odniesienia. Np. wzorcem długości mogłaby być krawędź sześcianu zawierającego określoną liczbę — powiedzmy 10^{30} — atomów platyny w temperaturze punktu potrójnego wody. (Jest oczywiste, że wzorzec taki byłby bardzo niewygodny, choćby ze względu na cenę platyny — Czytelnik może sobie wymyślać inne przykłady). Podobnie wzorcem czasu mógłby być na przykład średni czas życia swobodnego, spoczywającego w danym układzie neutronu. Jest faktem doświadczalnym, że relacje między różnymi wzorcami, określanymi według recept podobnych do powyższych, odtwarzanymi w różnych układach inercjalnych pozostają nie zmienione i to jest — między innymi — wyraz równouprawnienia różnych układów.

Nim przystąpimy do wyprowadzenia najogólniejszej relacji między współrzędnymi i czasem zdarzenia mierzonymi w różnych układach inercjalnych, musimy zwrócić uwagę, że pomiaru czasu różnych zdarzeń w danym układzie odniesienia można dokonywać pod warunkiem posiadania wielu zegarów spoczywających w danym układzie i znajdujących się w bezpośredniej bliskości każdego ze zdarzeń. Wszystkie te zegary — oprócz tego, że identyczne — muszą być jakoś „równo puszczone w ruch" — czyli, jak mówimy, zsynchronizowane. Zegary spoczywające w danym układzie odniesienia można wszystkie zsynchronizować. Jeden z praktycznych sposobów mógłby polegać na wyznaczeniu środka między synchronizowanymi dwoma zegarami i wysłaniu dwóch identycznych sygnałów symetrycznie w dwie strony (charakter tych sygnałów może być dowolny, byle zachodziła symetria). Docierające sygnały uruchamiają ustawione na zero zegary, które dalej uważamy za zsynchronizowane. Zakładamy, że można zsynchronizować w powyższym sensie dowolną ilość zegarów spoczywających względem siebie. Jest to założenie, przeciwko któremu nawet fanatyczny przeciwnik Einsteina, a zwolennik Newtona, nie mógłby zaprotestować, choć mógłby się dziwić, po co ta pedanteria.

Wyobraźmy sobie teraz dwa układy inercjalne we względnym ruchu i dwie klasy związanych z nimi zsynchronizowanych (oddzielnie w każdej klasie) zegarów. Każdemu zdarzeniu możemy przypisać współrzędne przestrzenne i czas mierzony w tych dwóch układach. Jaki jest związek między współrzędnymi w jednym i drugim układzie? Załóżmy dla prostoty, że rozważane zjawiska zachodzą wzdłuż jednej prostej. Układem odniesienia może być sztywny długi pręt z ustalonym punktem zerowym i przymocowanymi doń zsynchronizowanymi zegarami. Mamy dwa takie pręty będące we względnym ruchu i na każdym z nich obrany jest początek oraz zaznaczone współrzędne, tak jak to pokazuje rysunek.



Przy takim zwrocie osi symetria między układami U i U' jest zupełna. Jeśli U' porusza się względem U w kierunku wzrastających współrzędnych (ma prędkość dodatnią), to i układ U względem U' porusza się w kierunku wzrastających wartości x'. Ogólny związek między wartościami x, t i x', t' jakiegoś zdarzenia jest

$$x = f(x', t') \quad t = g(x', t'). \tag{1}$$

Weźmy ciało swobodne. Zgodnie z pierwszą zasadą dynamiki zdarzenia zachodzące w tym punkcie mają współrzędne spełniające związek

$$\alpha x + \beta t = \gamma \tag{2}$$

(ruch jednostajny). Na podstawie wzorów (1) możemy napisać dla tego ciała

$$\alpha f(x', t') + \beta g(x', t') = \gamma. \tag{3}$$

Ale ciało swobodne musi spełniać I zasadę dynamiki również w układzie U' (zasada względności). Zatem równanie (3) musi być liniowe, co jak się okazuje jest możliwe tylko wtedy, gdy same funkcje f i g są liniowe. Zatem

$$x = Ax' + Bt' + x_0 \quad t = Cx' + Dt' + t_0. \tag{4}$$

Przez odpowiedni wybór początków O i O' można zawsze uczynić stałe x_0 i t_0 równe zeru, zatem bez zmniejszania ogólności możemy napisać

$$x = Ax' + Bt' \quad t = Cx' + Dt'. \tag{5}$$

Liczby A, B, C i D, stałe dla danej pary układów, mogą zależeć tylko od prędkości względnej układów, którą oznaczymy przez V. Rozwiązując układ równań (5) względem x' i t' dostajemy

$$x' = \frac{D}{AD-BC}x + \frac{-B}{AD-BC}t \quad t' = \frac{-C}{AD-BC}x + \frac{A}{AD-BC}t. \tag{6}$$

Ze względu na pełną symetrię między U i U' powinna to być transformacja o identycznych współczynnikach jak w (5). Zatem

$$\frac{D}{AD-BC} = A, \quad \frac{-B}{AD-BC} = B, \qquad (7)$$
$$\frac{-C}{AD-BC} = C, \quad \frac{A}{AD-BC} = D.$$

O ile U i U' nie są we względnym spoczynku, to musi być $B \neq 0$ (inaczej punkt o współrzędnej $x' = 0$ miałby w U współrzędną x równą zeru, niezależnie od t', czyli spoczywałby w U). Jeśli $B \neq 0$, to układ równań (7) jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy

$$BC-AD = 1, \quad A = -D. \qquad (8)$$

Zdarzenia zachodzące w punkcie $x' = 0$ mają współrzędne w U równe

$$x = A \cdot 0 + Bt' = Bt' \qquad (9)$$
$$t = C \cdot 0 + Dt' = Dt'.$$

Stosunek $\frac{x}{t}$ to nic innego, jak prędkość V. Zatem

$$\frac{x}{t} = \frac{Bt'}{Dt'} = \frac{B}{D} = V. \qquad (10)$$

Równanie (10) wraz z równaniami (8) pozwala trzy spośród współczynników A, B, C i D wyrazić przez jeden z nich, np. D. Dostajemy

$$A = -D(V),$$
$$B = VD(V), \qquad (11)$$
$$C = \frac{1-D^2(V)}{VD(V)}.$$

Podstawiając (11) do (5) dostajemy

$$x = -D(V)x' + VD(V)t' \qquad (12)$$
$$t = \frac{1-D^2(V)}{VD(V)}x' + D(V)t'.$$

Wybór orientacji osi układu U' przeciwny do orientacji układu U był wygodny dla znalezienia powyższej postaci. Teraz nic nie stoi na przeszkodzie, by zmienić znak współrzędnych $x' \to -x'$. Prowadzi to do związku

$$x = D(V)x' + VD(V)t' \qquad (13)$$
$$t = \frac{D^2(V)-1}{VD(V)}x' + D(V)t'.$$

Rozważmy trzeci układ U'' poruszający się względem U' z prędkością Ω. Stosując transformację (13) z zamianą $x \to x'$, $x' \to x''$, $V \to \Omega$, dostajemy

$$x' = D(\Omega)x'' + \Omega D(\Omega)t'' \qquad (14)$$
$$t' = \frac{D^2(\Omega)-1}{\Omega D(\Omega)}x'' + D(\Omega)t''.$$

Aby ustalić związek między x'', t'' a x, t, podstawiamy (14) do (13). Dostajemy

$$x = D(V)[D(\Omega)x'' + \Omega D(\Omega)t''] + VD(V)\left[\frac{D^2(\Omega)-1}{\Omega D(\Omega)}x'' + D(\Omega)t''\right] \qquad (15)$$
$$t = \frac{D^2(V)-1}{VD(V)}[D(\Omega)x'' + \Omega D(\Omega)t''] + D(V)\left[\frac{D^2(\Omega)-1}{\Omega D(\Omega)}x'' + D(\Omega)t''\right].$$

Grupując wyrazy z x'' i t'' mamy

$$x = \left[D(V)D(\Omega) + \frac{D(V)V}{D(\Omega)\Omega}(D^2(\Omega)-1)\right]x'' + [D(V)D(\Omega)\Omega + D(V)D(\Omega)V]t''$$
$$t = \left[\frac{D(\Omega)}{D(V)V}(D^2(V)-1) + \frac{D(V)}{D(\Omega)\Omega}(D^2(\Omega)-1)\right]x'' + \qquad (16)$$
$$+\left[\frac{D(\Omega)\Omega}{D(V)V}(D^2(V)-1) + D(V)D(\Omega)\right]t''.$$

Transformacja (16) jest znów transformacją między dwoma inercjalnymi układami odniesienia i musi mieć wszelkie ogólne własności transformacji (13). Spośród tych własności wykorzystamy fakt, że współczynnik przy nowej współrzędnej w wyrażeniu na starą współrzędną jest równy współczynnikowi przy starym czasie w wyrażeniu na nowy czas. (Jest to stare równanie $A = -D$ z uwzględnieniem, że teraz wszystkie osie mają identyczną orientację).

Daje to równanie

$$D(V)D(\Omega) + \frac{D(V)V}{D(\Omega)\Omega}(D^2(\Omega)-1) = \frac{D(\Omega)\Omega}{D(V)V}(D^2(V)-1) + D(V)D(\Omega), \qquad (17)$$

które po redukcji i uporządkowaniu wyrazów przepisujemy w postaci

$$\frac{D^2(\Omega)-1}{D^2(\Omega)\Omega^2} = \frac{D^2(V)-1}{D^2(V)V^2}. \qquad (18)$$

Ponieważ V i Ω są niezależne, powyższe równanie oznacza, że kombinacja $(D^2-1)/D^2V^2$ jest w ogóle niezależna od V, czyli jest po prostu uniwersalną stałą.
Oznaczmy tę stałą literą E. Mamy

$$\frac{D^2(V)-1}{D^2(V)V^2} = \mathrm{E} = \frac{D^2(\Omega)-1}{D^2(\Omega)\Omega^2}, \qquad (19)$$

co po rozwiązaniu względem D daje

$$D(V) = \pm\frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{E}V^2}}. \qquad (20)$$

Ponieważ dla prędkości $V = 0$ powinniśmy dostać transformację tożsamościową ($x = x'$, $t = t'$), musimy wybrać znak „+" i transformację (1) przepisujemy ostatecznie w postaci

$$x = \frac{x'+Vt'}{\sqrt{1-\mathrm{E}V^2}} \qquad (21)$$
$$t = \frac{t'+V\mathrm{E}x'}{\sqrt{1-\mathrm{E}V^2}}.$$

Jest to najogólniejsza postać zgodna z naszymi założeniami, czyli z zasadą względności. Stała E jest zupełnie dowolna z punktu widzenia naszego rozumowania. W szczególności wybór stałej $\mathrm{E} = 0$ prowadzi do relacji

$$x = x' + Vt' \qquad (22)$$
$$t = t'$$

zwanej transformacją Galileusza, stanowiącą podstawę mechaniki klasycznej. Widzimy, że postać ta nie jest narzucona (aczkolwiek nie jest też wykluczona) przez samą zasadę względności. Zasada względności narzuca postać (21), ale stała uniwersalna E pozostaje nie określona przez powyższe rozumowanie.
Z wzorów (16) możemy odczytać wartość prędkości układu U'' względem U. Oznaczmy tę prędkość symbolem „$V+\Omega$", gdyż według fizyki klasycznej prędkość ta powinna być istotnie sumą prędkości V i Ω. Dzieląc współczynnik przy t'' w wyrażeniu na x przez współczynnik przy x'' w wyrażeniu na x dostajemy (zgodnie z dyskusją prowadzącą do wzorów (13)) szukaną prędkość wypadkową

$$\text{„}V+\Omega\text{"} = \frac{D(V)D(\Omega)V + D(V)D(\Omega)\Omega}{D(V)D(\Omega) + \frac{D(V)V}{D(\Omega)\Omega}(D^2(\Omega)-1)} = \qquad (23)$$
$$= \frac{V+\Omega}{1 + \frac{V\Omega}{D^2(\Omega)\Omega^2}(D^2(\Omega)-1)} = \frac{V+\Omega}{1+\mathrm{E}V\Omega}.$$

Dla $\mathrm{E} = 0$ wzór powyższy redukuje się istotnie do zwykłej sumy. Różnica między fizyką klasyczną a szczególną teorią względności (czyli fizyką relatywistyczną) zasadza się na tym, że w fizyce klasycznej przyjmowano $\mathrm{E} = 0$, podczas gdy w fizyce relatywistycznej przyjmuje się (zgodnie z doświadczeniem), że $\mathrm{E} \neq 0$.
Stałą E wyznaczyć jest w zasadzie bardzo łatwo. Wystarczy np. zmierzyć trzy prędkości występujące we wzorze (23), tj. V, Ω i „$V+\Omega$". Jeśli jednak E jest w zwykłych jednostkach bardzo małe (jak to ma miejsce w rzeczywistości), prędkości V i Ω nie są zbyt duże, a dokładność pomiaru nie jest niezwykle wielka, to w granicach dokładności może nam wyjść np. $\mathrm{E} = 0 \pm 10^{-10}\,\frac{s^2}{m^2}$, z czego niewiele się dowiadujemy. Toteż całe pokolenia fizyków sądziły, że po prostu $\mathrm{E} = 0$. Żeby zmierzyć E wystarczająco dokładnie na to, by stwierdzić, że w rzeczywistym świecie stała ta jest różna od zera, trzeba posługiwać się dużymi prędkościami ciał i układów.

Zamiast omawiać któreś z tysięcy znanych obecnie doświadczeń tego typu załóżmy, że $E \neq 0$, i zbadajmy jedną z konsekwencji tego faktu. Patrząc na wzór (19) widzimy, że stała E ma wymiar $\frac{s^2}{m^2}$. Zdefiniujmy nową stałą

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{E}} \tag{24}$$

o wymiarze prędkości. Łatwo dowieść, że dla $V, \Omega < v_0$ prędkość wypadkowa „$V+\Omega$" dana wzorem (23) jest też mniejsza od v_0. Na proces rozpędzania ciała możemy patrzyć w specjalny sposób, jako na proces składania prędkości. Układem wyjściowym, względem którego mierzymy prędkości i względem którego ciało na początku spoczywało, jest układ U. Po pewnym czasie (niewielkim) rozpędzone ciało uzyskało prędkość Δv. Wprowadzamy układ U' poruszający się względem U z prędkością Δv. Względem tego nowego układu ciało spoczywa pod koniec pierwszego etapu rozpędzania. Ale przypuśćmy, że czynnik rozpędzający działa nadal. Nada on w drugim etapie prędkość $\Delta v'$ względem U'. Wypadkowa prędkość względem układu wyjściowego wyniesie

$$„\Delta v+\Delta v'" = \frac{\Delta v+\Delta v'}{1+E\Delta v\cdot\Delta v'} < v_0. \tag{25}$$

Możemy znów wprowadzić układ poruszający się z tą prędkością i rozważyć kolejny etap prowadzący do prędkości

$$„„\Delta v+\Delta v'"+\Delta v''" < v_0, \tag{26}$$

znów mniejszej od v_0. Niezależnie od ilości etapów rozpędzania końcowa prędkość nie tylko nie przekroczy, ale nawet nie osiągnie v_0. Prędkość v_0 pozostaje prędkością graniczną. Można dowieść, że gdy czynnik rozpędzający nadaje w kolejnym etapie tę samą prędkość Δv (względem układu, w którym ciało spoczywało na początku tego etapu), to po n etapach prędkość względem układu wyjściowego wyniesie

$$v(n) = \frac{\left(1+\frac{\Delta v}{v_0}\right)^n-\left(1-\frac{\Delta v}{v_0}\right)^n}{\left(1+\frac{\Delta v}{v_0}\right)^n+\left(1-\frac{\Delta v}{v_0}\right)^n}\, v_0 \tag{27}$$

(Czytelnik może spróbować udowodnić ten wzór przez indukcję), zbliża się zatem nieograniczenie do v_0, gdy $n \to \infty$. Łatwo również wykazać, że gdy prędkość $\Omega = v_0$, to „$V+\Omega$" $= v_0$ niezależnie od V.

Prędkość v_0, oprócz tego, że jest prędkością graniczną, ma własność pozwalającą nadać jej nazwę prędkości absolutnej. Jeśli jakiś obiekt porusza się z prędkością v_0 względem układu U', to porusza się z tą samą prędkością v_0 względem każdego innego układu U niezależnie od prędkości względnej U i U'. Teoria względności nie twierdzi, że obiekt czy obiekty takie muszą istnieć w przyrodzie, jeśli jednak istnieją, to ich prędkości są takie same i równe granicznej prędkości wszelkich ciał. Do obiektów takich należy między innymi światło, zatem możemy v_0 utożsamić z prędkością światła. Tak też zazwyczaj nazywa się tę stałą i oznacza symbolem c ($c \simeq 300000$ km/s). Pozwala to przepisać transformację Lorentza w znanej postaci

$$x = \frac{x'+Vt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad t = \frac{t'+\frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad „V+\Omega" = \frac{V+\Omega}{1+\frac{V\Omega}{c^2}}.$$

Brukselka nie jest grą nową. Swego czasu była znana jako „mały topolog", potem jednak słuch o niej zaginął, a wydaje się, że warto ją przypomnieć. Brukselka jest grą dwuosobową, amatorzy mogą jednak tworzyć wariacje na jej temat (gra trójosobowa, czteroosobowa itd.). Do gry potrzebna jest kartka papieru i pisak. Grający rysują linie i kropki. Rzędem kropki będziemy nazywali liczbę wychodzących z niej linii. I tak poniższe kropki mają odpowiednio:

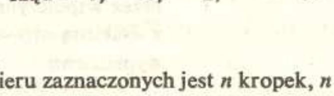
rząd = 0, 1, 2, 3.

Pozostałe przypadki nie będą nas interesowały.

Jak się gra w brukselkę? Na początku na kartce papieru zaznaczonych jest n kropek, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Gracze kolejno prowadzą linie od kropki do kropki (może to być ta sama kropka) i na tej linii zaznaczają nową kropkę (rząd nowej kropki jest oczywiście równy 2). Reguły są następujące:

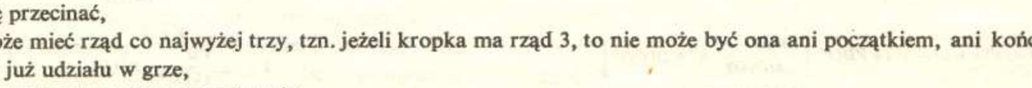
1) linie nie mogą się przecinać,
2) każda kropka może mieć rząd co najwyżej trzy, tzn. jeżeli kropka ma rząd 3, to nie może być ona ani początkiem, ani końcem nowej linii — nie bierze już udziału w grze,
3) przegrywa gracz, który nie może wykonać ruchu.

A oto przykładowe sytuacje końcowe, gra została zakończona:



$n = 2$ $n = 2$ $n = 3$

Gdy $n = 1$, przebieg partii jest zdeterminowany, nieciekawy, gracz, który zaczyna, skazany jest na porażkę. Kolejne fazy tej gry są następujące:



sytuacja wyjściowa po pierwszym ruchu po drugim ruchu lub i koniec.

Załóżmy, że obaj gracze bardzo dobrze grają w brukselkę. Zastanówcie się, czy istnieje strategia wygrywająca dla któregoś z grających przy $n = 2, 3, 4, 5$ (dla $n = 2$ problem nie jest trudny).

Dr Edward STACHOWSKI