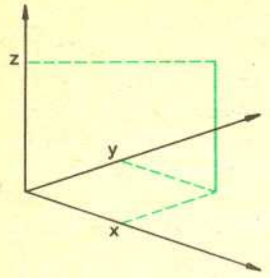
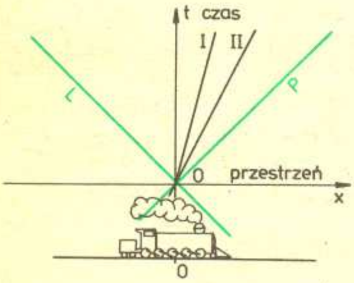
Czasoprzestrzeń

Dr Robert GOLDBLATT, Nowa Zelandia



Aby opisać położenie przedmiotu w przestrzeni, potrzebna jest trójka liczb $\langle x, y, z\rangle$, określająca współrzędne tego przedmiotu w trzech wymiarach względem pewnego zadanego początku O. Przedmiot może jednak poruszać się w przestrzeni w pewnym czasie. Aby opisać jego zachowanie, wprowadzamy więc czwartą współrzędną określającą czas (chwilę) t, w którym przedmiot zajmuje położenie o współrzędnych przestrzennych $\langle x, y, z\rangle$. I tak, pełne umiejscowienie przedmiotu w czasie i przestrzeni dane jest przez czwórkę liczb $\langle x, y, z, t\rangle$, tj. przez punkt w czterowymiarowej przestrzeni znanej jako czasoprzestrzeń Minkowskiego od nazwiska Hermanna Minkowskiego (1864–1909), który pierwszy zdefiniował tę przestrzeń i zbadał jej własności geometryczne.

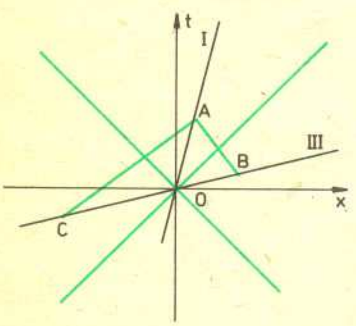
Chociaż nie możemy ani narysować ani wyobrazić sobie przestrzeni czterowymiarowych, możemy zobrazować własności czasoprzestrzeni rozważając jej dwu- i trójwymiarowe aspekty. Ta właśnie metoda została zastosowana przez Alberta Einsteina (1879–1955), twórcę teorii względności, która jest teorią czasu i przestrzeni używaną w fizyce współczesnej. Einstein tłumaczył swoje koncepcje analizując przykład pociągu poruszającego się wzdłuż toru. W tym przypadku wystarczy rozpatrywać tylko jeden wymiar przestrzeni i umiejscowienie przedmiotu jest określone przez punkt $\langle x, t\rangle$ w geometrii dwuwymiarowej, gdzie x jest położeniem na ustalonej prostej (na torze) w czasie t. Ta dwuwymiarowa czasoprzestrzeń wygląda tak jak obok.



Jeżeli pociąg jest nieruchomy, to jego współrzędna przestrzenna x jest stale równa 0 i historia pociągu reprezentowana jest przez pionową oś t. Tę prostą nazywa się linią świata pociągu. Kiedy pociąg porusza się na prawo ze stałą prędkością, jego linia świata jest nachylona w prawo (prosta I), gdyż x zwiększa się jednostajnie ze wzrostem t. Im szybciej jedzie pociąg, tym szybszy jest wzrost x wraz z t, a więc tym bardziej na prawo znajduje się odpowiednia linia świata (prosta II). Istnieje jednak ograniczenie na położenie tej prostej. Zgodnie z teorią względności pociąg nigdy nie może poruszać się szybciej niż światło. Kolorowe proste są liniami świata fotonu (cząstki światła) poruszającego się wzdłuż toru w prawo (P) lub w lewo (L). Żadne przedmioty nie mogą poruszać się szybciej niż foton i wszystkie ich linie świata zawsze znajdują się w obszarze powyżej kolorowych linii. Obszar ten przedstawia wszystkie możliwe przyszłe położenia czasoprzestrzenne początku układu współrzędnych O. Obszar poniżej kolorowych linii reprezentuje wszystkie możliwe położenia przeszłe.

Proste przechodzące przez O i leżące w obszarach przeszłości (dolnym) i przyszłości (górnym) nazywa się czasopodobnymi, podczas gdy linie kolorowe noszą nazwę zerowych (świetlnych). Wszystkie inne proste przechodzące przez O są przestrzennopodobne i leżą w obszarach na lewo i na prawo. Obszary te przedstawiają zdarzenia, które nie znajdują się w czasie ani przed ani po punkcie O. Niektóre z tych zdarzeń są równoczesne z O, czyli zachodzą w tym samym czasie $t = 0$. Takie pojęcie równoczesności jest jednak względne. W istocie już samo pojęcie ruchu jest względne. Nie istnieje ruch bezwzględny, istnieje jedynie ruch względem pewnego punktu odniesienia. Jeżeli uznamy się za nieruchomych „obserwatorów", których linią świata jest oś t, to pociąg mający linię świata I będzie oddalać się od nas. Ale obserwator znajdujący się w pociągu ma prawo uważać się za nieruchomego, a nas za oddalających się od niego. Punkty na prostej I przedstawiają dla niego te same położenia przestrzenne, podczas gdy dla nas są to położenia różne. Zasada względności stwierdza, że oba te punkty widzenia są równouprawnione. Prawa fizyki nie przemawiają na korzyść żadnego z nich.

Tak więc punkty (zdarzenia) na osi x są dla nas równoczesne, gdyż wszystkie mają współrzędną czasową $t = 0$. Jednak dla obserwatora poruszającego się w pociągu zdarzenia te zachodzą w różnych chwilach. Punkty, które są równoczesne dla niego, leżą na innej prostej, a mianowicie na prostej III z następnego rysunku.



Aby to zrozumieć, zauważmy, że jeżeli z punktów B i C (które nie są dla nas równoczesne) zostaną w stronę pociągu wysłane fotony, to do obserwatora w pociągu dotrą one w tej samej chwili (punkt A), a więc i ich wysłanie uzna on za równoczesne.

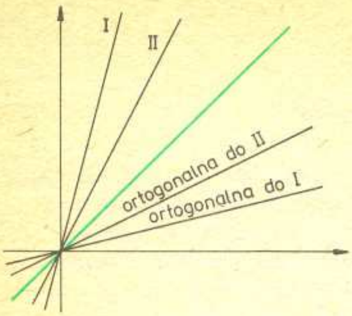
Kiedy dwie proste są związane w ten właśnie sposób, że jedna jest linią świata poruszającego się obserwatora, a druga prostą składającą się z punktów dla niego równoczesnych, wtedy mówimy, że te proste są ortogonalne. Istnieje proste algebraiczne przedstawienie tego pojęcia. Niech punkt A ma współrzędne (x_1, t_1), a punkt B — (x_2, t_2). Wprowadzamy następującą wielkość:

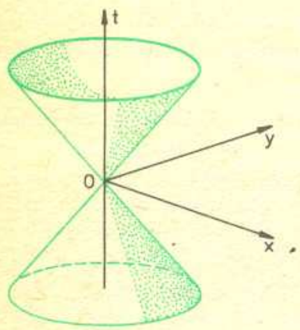
$$A \cdot B = x_1 x_2 - t_1 t_2 .$$

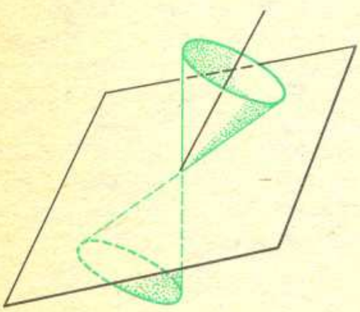
Liczbę $A \cdot B$ nazywamy iloczynem wewnętrznym A i B. Znajdujemy, że prosta OA jest, w opisanym wyżej sensie, ortogonalna do prostej OB wtedy i tylko wtedy, kiedy iloczyn wewnętrzny A i B równa się zero, czyli, gdy $A \cdot B = 0$.
Jeżeli $A = B$, to iloczyn wewnętrzny przybiera postać

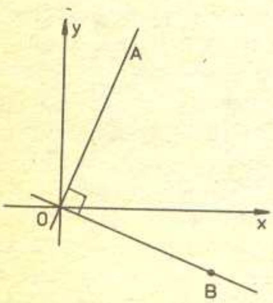
$$A \cdot A = x_1^2 - t_1^2 .$$

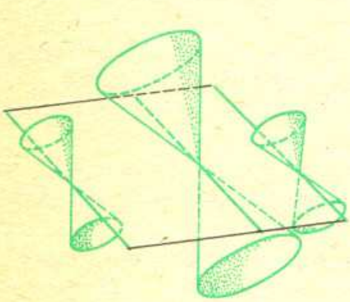
Rozwiązanie zadania M 211
Przypuśćmy, że taki wielomian istnieje. Ponieważ NWW $(m, km) = km$ dla $k = 0, 1, 2, \ldots$, więc równanie $p(x) - x = 0$ ma wówczas nieskończenie wiele rozwiązań $x_k = km$. Wynika stąd, że wielomian p jest tożsamościowo równy x. To przeczy temu, że $p(1) = m \neq 1$.

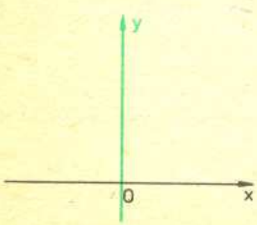












Wyrażenie to może być wykorzystane do rozróżnienia i scharakteryzowania wprowadzonych poprzednio trzech rodzajów prostych, co pokazuje tabelka

OA jest	$A \cdot A$ jest
czasopodobna	ujemny
zerowa	zero
przestrzennopodobna	dodatni

Zauważmy, że zgodnie z poprzednią definicją prosta zerowa jest ortogonalna sama do siebie. Jest tak dlatego, że im szybciej porusza się przedmiot, tym silniej będzie nachylona prosta punktów dla niego równoczesnych, a więc prosta ta znajdzie się tym bliżej linii świata przedmiotu.

Gdy przedmiot porusza się tak szybko, jak to tylko możliwe, czyli z prędkością światła, obie proste pokrywają się.

Opisana wyżej dwuwymiarowa geometria jest znana jako płaszczyzna Lorentza, od nazwiska fizyka H. Lorentza (1853–1928), który podał formuły wiążące obliczenia (pomiary) wykonywane przez dwóch obserwatorów poruszających się względem siebie ze stałą prędkością.

Możemy teraz wprowadzić do naszych rozważań dodatkowy wymiar, rozpatrując przedmioty poruszające się względem siebie w dwóch wymiarach, powiedzmy na pewnej płaszczyźnie. Sytuacja taka tworzy czasoprzestrzeń trójwymiarową.

Linie świata fotonów tworzą teraz stożek, nazywany stożkiem światła. Proste znajdujące się wewnątrz stożka (takie jak oś t) są czasopodobne — są to historie poruszających się jednostajnie obserwatorów — zaś proste na zewnątrz stożka są przestrzennopodobne (takie jak oś x).

Każdy punkt w tej czasoprzestrzeni ma trójkę współrzędnych $\langle x, y, t \rangle$ — dwie określają położenie, a jedna czas. Dla danych punktów $A = \langle x_1, y_1, t_1 \rangle$ oraz $B = \langle x_2, y_2, t_2 \rangle$ ich iloczyn wewnętrzny określony jest teraz wzorem

$$A \cdot B = x_1 x_2 + y_1 y_2 - t_1 t_2.$$

Wtedy można stosować ten sam, jak poprzednio, opis ortogonalności — OA jest ortogonalna do OB wtedy i tylko wtedy, gdy $A \cdot B = 0$.

W przypadku, gdy $A = B$, mamy teraz

$$A \cdot A = x_1^2 + y_1^2 - t_1^2.$$

W oparciu o to wyrażenie możemy scharakteryzować trzy typy prostych nowej geometrii za pomocą tej samej, jak poprzednio, tabelki.

Obecna sytuacja różni się od dwuwymiarowej tym, że istnieją pary przestrzennopodobnych prostych ortogonalnych, na przykład osie x i y. Teraz bowiem wszystkie punkty, które są równoczesne dla jakiegoś obserwatora, tworzą płaszczyznę. Dla nieruchomego obserwatora, którego linią świata jest oś t, będzie to płaszczyzna xy. Dla obserwatora poruszającego się jest ona nachylona do tej płaszczyzny pod pewnym kątem.

Taka płaszczyzna zdarzeń równoczesnych nie zawiera prostych zerowych. Składa się ona wyłącznie z prostych przestrzennopodobnych i przypomina znajomą płaszczyznę euklidesową. Na płaszczyźnie euklidesowej mamy inny iloczyn wewnętrzny, zwykle nazywany iloczynem skalarnym punktów $A = \langle x_1, y_1 \rangle$ oraz $B = \langle x_2, y_2 \rangle$, dany wzorem

$$A \cdot B = x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

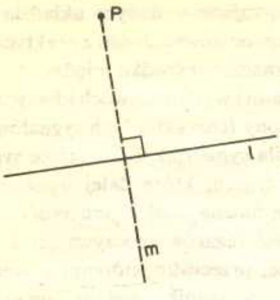
Z taką postacią iloczynu wewnętrznego proste są ortogonalne ($A \cdot B = 0$), gdy są prostopadłe (tzn. tworzą kąt 90°). Dla pewnego obserwatora w czasoprzestrzeni para ortogonalnych przestrzennopodobnych prostych będzie się składać ze zdarzeń równoczesnych. Proste te będą dla niego reprezentować dwa prostopadłe kierunki przestrzenne.

Zauważmy, że w trójwymiarowej czasoprzestrzeni również występują płaszczyzny Lorentza. Przykładem jest dowolna płaszczyzna zawierająca oś t — przecina ona stożek światła wzdłuż dwóch prostych zerowych. Istnieje jednak jeszcze jeden rodzaj płaszczyzny odpowiadający obecności nowych ortogonalnych par prostych: zerowej i przestrzennopodobnej. Ten nowy rodzaj płaszczyzny pojawia się jako płaszczyzna styczna do stożka światła, tzn. przecinająca go wzdłuż jednej tylko prostej.

Dwuwymiarowa wersja tej sytuacji, czyli płaszczyzna izotropowa, jest przedstawiona na rysunku niżej i zawiera tylko jedną prostą zerową przechodzącą przez środek układu współrzędnych. Własności płaszczyzny izotropowej można omawiać, posługując się innym jeszcze iloczynem wewnętrznym, który dla $A = \langle x_1, y_1 \rangle$ i $B = \langle x_2, y_2 \rangle$ przyjmuje postać

$$A \cdot B = x_1 x_2 + 0 \cdot y_1 y_2 =$$
$$= x_1 x_2.$$

Teraz, jeżeli $A \cdot B = 0$, to jeden z dwóch punktów musi mieć współrzędną x równą 0 i musi leżeć na osi y. Tak więc na płaszczyźnie izotropowej oś y jest prostą osobliwą, co oznacza, że jest ona ortogonalna do każdej innej prostej na tej płaszczyźnie. Wszystkie inne proste przechodzące przez środek układu współrzędnych są ortogonalne do niej i tylko do niej.

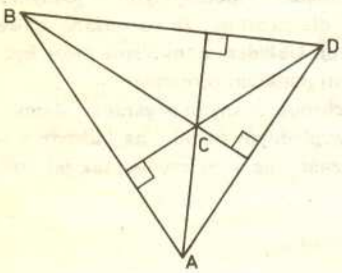


W czasoprzestrzeni, jeżeli linia świata fotonu jest ortogonalna do pewnej prostej przestrzennopodobnej, to jakiś obserwator zobaczy ten foton poruszający się w pewnym kierunku ortogonalnym do kierunku wyznaczonego przez tę prostą przestrzennopodobną. Dla obserwatora poruszającego się z prędkością światła punkty (zdarzenia) dla niego równoczesne tworzą płaszczyznę izotropową zawierającą jego zerową linię świata. Można rozwinąć aksjomatyczną postać definicji rozważanych dotychczas związków ortogonalności. Do opisu ortogonalności w płaszczyznach dwuwymiarowych potrzebne są cztery aksjomaty.

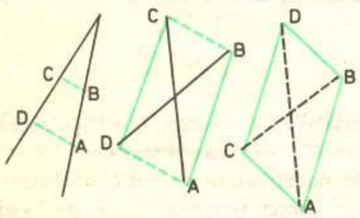
Aksjomat 1. Jeżeli prosta *l* jest ortogonalna do prostej *m*, to *m* jest ortogonalna do *l*.

Aksjomat 2. Na dowolnej płaszczyźnie, jeżeli *l* jest prostą nieosobliwą, to dla każdego punktu *P* istnieje jedna i tylko jedna prosta *m* przechodząca przez *P* i ortogonalna do *l*.
Na płaszczyźnie euklidesowej Aksjomat 2 można zilustrować, jak na rysunku wyżej, podczas gdy na płaszczyźnie Lorentza, jeżeli *l* jest zerowa, to *m* jest również zerowa i równoległa do *l*.

Aksjomat 3. Dla dowolnych czterech punktów *A*, *B*, *C*, *D*, jeżeli prosta *AB* jest ortogonalną do prostej *CD* i *AC* jest ortogonalna do *BD*, to *AD* jest ortogonalna do *BC*.
Na płaszczyźnie euklidesowej Aksjomat 3 przyjmuje postać jak obok, podczas gdy na płaszczyźnie Lorentza istnieją inne możliwości — jak niżej.



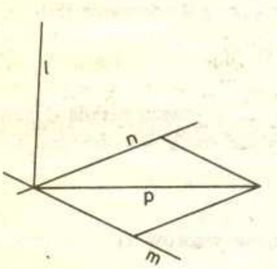
Aksjomat ten jest, w istocie, ściśle związany ze stwierdzeniem, że wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie.
Wreszcie potrzebny jest aksjomat wprowadzający rozróżnienie między trzema możliwymi rodzajami płaszczyzn.
Aksjomat 4. Na dowolnej płaszczyźnie, albo
(I) nie istnieją proste ortogonalne same do siebie (euklidesowa), albo
(II) istnieje co najmniej jedna prosta ortogonalna sama do siebie, lecz nie istnieją proste osobliwe (Lorentza), albo (III) istnieje prosta osobliwa (izotropowa).



Aby scharakteryzować ortogonalność w czasoprzestrzeni trójwymiarowej, utrzymujemy w mocy Aksjomaty 1 do 4 i dodajemy

Aksjomat 5. Jeżeli *l* jest ortogonalna do dwóch różnych prostych *m* i *n* oraz *p* leży w płaszczyźnie zawierającej *m* i *n*, to *l* jest ortogonalna do *p*.

Aksjomat 6. Istnieją proste ortogonalne same do siebie, lecz nie istnieją proste osobliwe (tzn. nie istnieją proste ortogonalne do każdej prostej w trójwymiarowej czasoprzestrzeni).



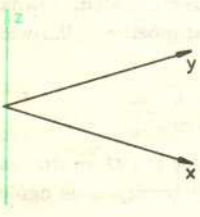
Po dokonaniu dokładnej analizy geometrii w czasoprzestrzeni trójwymiarowej stosunkowo łatwo jest opisać strukturę czterowymiarowej czasoprzestrzeni Minkowskiego przez proste „zwiększenie wymiaru o jeden". Iloczyn wewnętrzny jest teraz postaci

$$A \cdot B = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 - t_1 t_2$$

i zachowuje poprzednią definicję ortogonalności, a wyrażenie

$$A \cdot A = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - t_1^2$$

używane jest, jak poprzednio, do określenia trzech rodzajów prostych.
Punkty (zdarzenia), dla danego obserwatora w danej chwili równoczesne, tworzą teraz nie płaszczyznę, lecz trójwymiarową rozmaitość (trójwymiarową geometrię).
Dla obserwatora poruszającego się wolniej niż światło rozmaitość ta jest pewnym rodzajem trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej, w której „ortogonalny" oznacza „pod kątem 90°".
Każda trójwymiarowa rozmaitość zawierająca oś *t* wygląda jak czasoprzestrzeń trójwymiarowa z zawartym w niej trójwymiarowym stożkiem światła, pochodzącym z przecięcia rozmaitości ze stożkiem czterowymiarowym (zbiorem prostych zerowych).
Wreszcie, dla obserwatora poruszającego się z prędkością światła, trójwymiarowa rozmaitość punktów jednoczesnych jest styczna do stożka światła — rozważana niezależnie wygląda ona tak, jak na rysunku



gdzie oś *z* jest linią świata owego zerowego (świetlnego) obserwatora. Rozmaitość ta jest tworem analogicznym do płaszczyzny izotropowej. Struktura jej określona jest przez następujący iloczyn wewnętrzny

$$A \cdot B = x_1 x_2 + 0 y_1 y_2 + 0 z_1 z_2 =$$
$$= x_1 x_2.$$

W celu przedstawienia pojęcia ortogonalności w geometrii Minkowskiego w postaci aksjomatycznej, zachowujemy Aksjomaty 1 do 4, zaś 5 i 6 zastępujemy przez
Aksjomat 5'. Jeżeli *l* jest ortogonalna do prostych *m*, *n* i *p*, które nie leżą na jednej płaszczyźnie, zaś *q* należy do trójwymiarowej rozmaitości zawierającej *m*, *n* i *p*, to *l* jest ortogonalna do *q*.
Aksjomat 6'. Istnieją proste ortogonalne same do siebie, ale nie ma prostych osobliwych, a żadne dwie przecinające się proste, które są ortogonalne same do siebie, nie są wzajemnie ortogonalne.