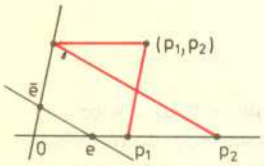
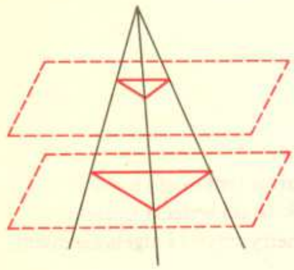
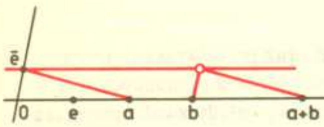
Słabe geometrie

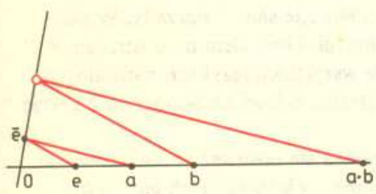
Dr Marek KORDOS

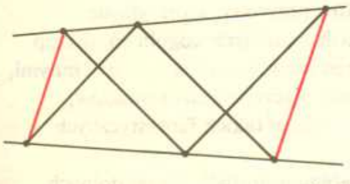
Dość rozpowszechniona jest opinia, że przestrzeń geometryczna, w jakiej żyjemy, ma tę własność, iż każdy jej punkt opisuje się trójką (lub inną *n*-tką) liczb rzeczywistych, przy czym wszystkie liczby rzeczywiste są zaangażowane do „bycia współrzędnymi" jakichś punktów. Fizycy dyskutują, czy nasza przestrzeń jest euklidesowa, czy jakaś inna, nie podważając powyższej opinii. W tym świetle wydawać się może dziwne, że istnieje dyscyplina zajmująca się badaniem geometrii, w których od rozpatrywanych przestrzeni nie wymaga się aż tak wiele.

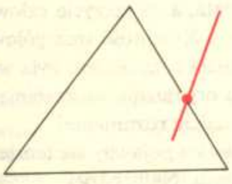












Spośród wszystkich twierdzeń danej aksjomatycznie teorii można (ew. teoretycznie można) wyróżnić te, do których dowodu nie jest niezbędny jakiś z góry obrany aksjomat. Jeśli tę operację przeprowadzimy konsekwentnie, uzyskamy informację o tym, co z których aksjomatów teorii wynika, a co nie wynika. Ostatecznie będziemy wiedzieli, które z aksjomatów naszej teorii muszą być spełnione w jakiejś dziedzinie, aby były w niej spełnione interesujące nas twierdzenia, a które nie muszą.
Informacje te byłyby zbędne, gdyby mieć pewność, że jedynym zastosowaniem geometrii jest badanie przestrzeni geometrycznej i to spełniającej podaną obok opinię. Tak jednak od dawna już nie jest i z tego względu badania nad geometriami opartymi tylko na niektórych aksjomatach, czyli słabymi geometriami, oraz nad rolą poszczególnych aksjomatów są, szczególnie w ostatnim dwudziestoleciu, prowadzone intensywnie.

*

Jeżeli jakaś geometria zapewnia nam możliwość prowadzenia równoległych i (umówmy się, że do końca artykułu mówić będziemy o płaszczyźnie) mamy do dyspozycji dwie proste nierównoległe, to każdemu punktowi możemy przyporządkować dwa punkty na owych nierównoległych prostych (zwanych dalej osiami), czyli współrzędne.
To, że współrzędnymi są punkty, wynika po pierwsze stąd, że tak jest istotnie, a po drugie nazwać tych punktów liczbami nie możemy, gdyż na razie nie widać sposobu, jak by na nich liczyć. Geometria zbudowana przy przyjęciu dwu podanych wyżej założeń jest istotnie bardzo słaba. Ale wszędzie, gdzie (przy odpowiedniej interpretacji pojęcia „prosta" i pojęcia „równoległość") spełnione są te założenia, można mówić o współrzędnych. Co więcej, można obie współrzędne mieć na jednej prostej. W tym celu obieramy na osiach po jednym punkcie e i $\bar{e}$ i wszystkie drugie współrzędne przenosimy równolegle do $e\bar{e}$ na pierwszą oś.

*

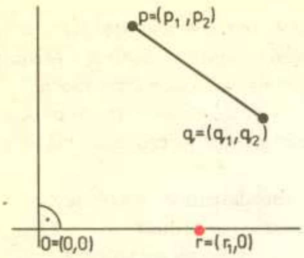
I teraz możemy zadać pytanie: co trzeba założyć w geometrii, żeby można było rachować na współrzędnych? Jeżeli przez rachowanie rozumieć będziemy wykonywanie tzw. czterech działań, przy czym dodawanie i mnożenie mają być łączne, mnożenie ma być rozdzielne względem dodawania, a dodawanie ma być przemienne, to owym dodatkowym założeniem musi być aksjomat *Desargues'a* (czyt. dezarga). Musi w tym sensie, że każde inne „dobre" założenie musi ten aksjomat implikować. Aksjomat Desargues'a orzeka, że jeśli dwa trójkąty wpisane w trzy proste, mające wspólny punkt, mają dwie pary boków równoległych, to równoległa jest i trzecia para boków. Zdanie to ma naturalne źródło w geometrii przestrzeni — ostrosłup trójkątny przecięty dwiema płaszczyznami równoległymi. Ale oczywiście może być też traktowane jako fakt dotyczący geometrii płaszczyzny (zapomnijmy o czerwonych płaszczyznach).
Działania definiujemy jak na rysunkach. Aksjomat Desargues'a pozwala wykazać, że mają one żądane wyżej własności, a niejako „na bis" udowodnić, że wynik nie zależy od położenia drugiej osi i punktu $\bar{e}$ na niej — jedynie istotne jest położenie punktów o i e, które pełnią rolę zera i jedynki. Nie wykażemy tego z braku miejsca, pozostawiając to dość trudne, ale wielce pouczające zadanie Czytelnikowi.
Można również sprawdzić, że gdy na współrzędnych umiemy liczyć, to w geometrii prawdziwy jest aksjomat Desargues'a (proszę sprawdzić — też trudne). Ostatecznie mamy więc:
Możliwość rachowania na współrzędnych, zanurzalność płaszczyzny w przestrzeni trójwymiarowej i aksjomat Desargues'a są równoważnymi założeniami.
W ten sposób obejrzeliśmy typowy rezultat dla badań nad słabymi geometriami — znaleźliśmy pełną analogię między założeniami pochodzącymi z różnych dyscyplin matematyki (algebra, stereometria, planimetria).

*

Wśród wymienionych własności działań brakowało przemienności mnożenia. Aby mieć i tę własność, musimy założyć aksjomat *Pappusa*. Orzeka on, że jeśli w dwie proste wpiszemy (odwrotnie) dwie litery *V* o odpowiednio równoległych ramionach, to i zamykające proste będą równoległe. I znów zostawiamy Czytelnikowi sprawdzenie, że z aksjomatu Pappusa wynika przemienność mnożenia (tym razem łatwe — należy posłużyć się poprzednim rysunkiem), jak też, że przemienność mnożenia współrzędnych pociąga za sobą prawdziwość aksjomatu Pappusa (znów trudne). Bardzo trudne, ale możliwe jest wykazanie, że aksjomat Pappusa i (o ile dysponujemy prostopadłością) przecinanie się wysokości trójkąta w jednym punkcie to zdania równoważne. Ostatecznie więc badanie słabych geometrii daje równoważność:
Przemienność mnożenia, aksjomat Pappusa, przecinanie się wysokości trójkąta w jednym punkcie.

*

Gdybyśmy chcieli wprowadzić jakoś porządek wśród współrzędnych, to okaże się, że równoważne są:
Iloczyn dodatnich jest dodatni i aksjomat Pascha.
Ten ostatni mówi, że prosta nie przechodząca przez żaden wierzchołek trójkąta i przecinająca jeden z boków trójkąta przecina również jeden z pozostałych boków. Rezultat powyższy jest dość nowy — nie ma jeszcze dziesięciu lat.



Weźmy teraz układ współrzędnych o osiach prostopadłych i równych jednostkach na nich (o każdym układzie można założyć, że jest taki, tylko rysunek będzie wtedy nie w zgodzie z intuicją). Zgodnie z twierdzeniem *Pitagorasa* przyjmujemy, że

$$(*) \qquad ab \equiv cd \leftrightarrow (a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2 = (c_1-d_1)^2+(c_2-d_2)^2.$$

I zastanówmy się, czego musimy wymagać od współrzędnych, abyśmy mogli odkładać odcinki. Odłóżmy odcinek pq na dodatniej półosi pierwszej osi, poczynając od punktu o, a na punkcie r kończąc. Wobec (*) będzie:

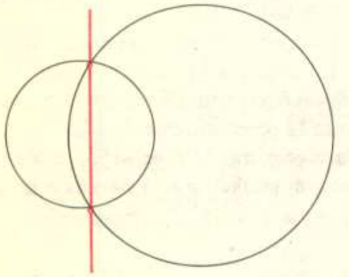
$$(p_1-q_1)^2+(p_2-q_2)^2 = (r_1-0)^2+(0-0)^2 = r_1^2.$$

Okazuje się więc, że odkładanie odcinka pociąga za sobą warunek na ciało współrzędnych

$$\bigwedge_{x,y} \bigvee_{z} x^2+y^2 = z^2$$

i odwrotnie: warunek ten, zwany *pitagorejskością ciała*, umożliwia odkładanie odcinka.

*



Przetnijmy dwa okręgi i poszukajmy ich przecięć:

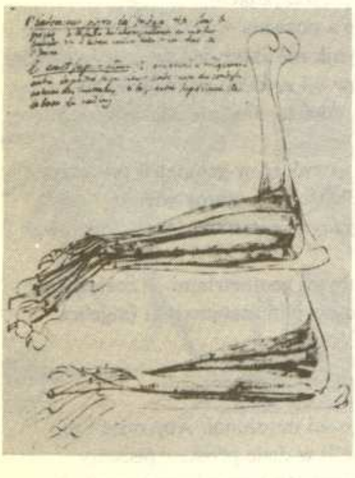
$$\begin{cases} (x-a_1)^2+(y-b_1)^2 = r_1^2 \\ (x-a_2)^2+(y-b_2)^2 = r_2^2. \end{cases}$$

Odejmując stronami stwierdzimy, że otrzymane równanie jest stopnia pierwszego, a więc reprezentuje prostą. Wyliczając jedną z niewiadomych z tej różnicy i wstawiając do równania pierwszego otrzymamy równanie kwadratowe z jedną niewiadomą. Aby je rozwiązać, musimy umieć wyciągać pierwiastek kwadratowy. Warunek

$$\bigwedge_{x} \bigvee_{y} x = y^2 \vee x = -y^2$$

nazywany jest *euklidesowością*. Zatem równoważne są:
Przecinanie okręgów, przecinanie okręgu z prostą, euklidesowość.

Zamiast coraz bardziej pospiesznie i, w konsekwencji, powierzchownie relacjonować dalsze rezultaty, napiszę w tym miejscu itd., bo gotowych rezultatów wiele, a na dodatek, jako się rzekło, badania w toku. Zachęcam przy tym Czytelników do wzięcia udziału w badaniach słabych geometrii, szczególnie w tym fragmencie, który dotyczy analogii między faktami geometrycznymi i algebraicznymi.



Georges Cuvier (1769—1832) i anatomia porównawcza

Prof. dr Henryk SZARSKI, członek rzeczywisty PAN

Cuviera nazywa się twórcą anatomii porównawczej i paleontologii oraz przeciwnikiem teorii ewolucji. Z tym ostatnim określeniem trudno się godzić, gdyż zespół hipotez tworzących współczesną teorię ewolucji za czasów Cuviera po prostu nie istniał, a poglądy zwalczane przez Cuviera były od ewolucjonizmu bardzo odległe.

Ludzie zawsze zdawali sobie sprawę, że rozmaite organizmy mają „te same" narządy. W ciele zabijanych kręgowców człowiek znajdował wątroby, serca i mózgi. Dowodem na dostrzeganie tożsamości narządów jest istnienie odpowiednich wyrażeń we wszystkich językach naturalnych. Już w starożytności wyciągano też wnioski o budowie wewnętrznej człowieka w oparciu o sekcje innych ssaków.

W wieku osiemnastym zaczęto się zastanawiać, jak daleko można się posuwać w odszukiwaniu identycznych elementów organizmów, rozumiano też, że te same części u różnych gatunków mogą się między sobą bardzo różnić, np. czaszka konia, kota i ptaka, ząb zająca, słonia lub lwa. Pod koniec wieku rozwinęła się szkoła tak zwanych filozofów przyrody, która głosiła absolutną jedność świata zwierząt. Wymagało to budowania bardzo śmiałych uogólnień, tak np. E. Geoffroy dowodził w r. 1820 jedności budowy owadów i kręgowców, twierdząc między innymi, że kręgom zwierząt kręgowych odpowiadają pierścienie chitynowe otaczające ciało owadów, żebrom zaś odpowiadają owadzie odnóża! Można by przytoczyć więcej takich fantastycznych twierdzeń.

Inną wielką syntezą przyrodniczą wieku osiemnastego była „drabina jestestw". Na jej dolnych szczeblach mieściły się minerały, na wyższych rośliny, wyżej stały zwierzęta, a na szczycie człowiek. Niektórzy autorzy ponad człowiekiem umieszczali jeszcze aniołów i Boga. Kolejność szczegółowa była sprawą sporną, zawsze jednak porządek był liniowy, drabina nie miała rozgałęzień, była więc najzupełniej różna od współczesnych „drzew filogenetycznych". Pozycja organizmu na drabinie nie miała żadnego związku z wymiarem czasowym, lecz wynikała z rozmaicie rozumianej hierarchii istot. Wreszcie na przełomie osiemnastego i dziewiętnastego wieku pojawiły się teorie transformistyczne, głoszące, że gatunki mogą się zmieniać z upływem czasu. Najbardziej rozbudowana i najszerzej znana jest wśród nich synteza Lamarcka.

Georges Cuvier sprzeciwił się wszystkim tym trzem uogólnieniom i zdołał przekonać współczesnych o słuszności swego stanowiska. Jest on więc wielkim reformatorem nauk biologicznych. Urodził się w mieście Montbéliard, blisko obecnej granicy francusko-szwajcarskiej. Teren ten należał wówczas do księcia Wirtembergii, toteż Cuvier kształcił się od 15 do 19 roku życia w stolicy księstwa, Stuttgarcie. Po ukończeniu szkół Cuvier został nauczycielem w zamożnej rodzinie