Prawie takie same, czyli podobne

Spójrzmy na dwa kwadraty, jeden nieco względem drugiego przesunięty. Czy to są te same kwadraty? Ścisła odpowiedź zapewne powinna brzmieć — nie. Spójrzmy dalej na dowolne dwa kwadraty. Znowu — skoro powiedziałem dwa, to zapewne są to obiekty różne. Ale przecież zarazem są one podobne jakoś — w pierwszym przypadku są przystające, w drugim mają ten sam kształt. Z uwagi na wymienione własności są one analogiczne. Boć analogiczność to zawsze analogiczność z uwagi na coś, albo, inaczej mówiąc, równoważność ze względu na coś.

We współczesnej matematyce pojęcie relacji równoważności jest dobrze ugruntowane i znajduje swe zastosowanie w każdej jej dyscyplinie. Ściśle, relacją równoważności w klasie X nazywamy taką dwuargumentową relację $\approx$ w X, która jest zwrotna, czyli dla każdego x ze zbioru X zachodzi $x \approx x$, która jest symetryczna, czyli dla dowolnych x, y ze zbioru X $x \approx y$ pociąga $y \approx x$, oraz jest przechodnia, czyli $x \approx y$ i $y \approx z$ pociąga $x \approx z$. Przykładami nieraz już w Delcie omawianymi są kongruencje w zbiorze liczbowym. Przykładem takim jest również relacja izomorficzności. Jeśli $\approx$ jest równoważnością w X, to klasą abstrakcji $\approx$ (klasą abstrakcji elementu x z X) nazywamy zbiór

$$\{x' \in X\colon x \approx x'\} \overset{\text{ozn}}{=} x/\approx \quad (\text{lub } [x]_{\approx}).$$

Łatwo zobaczyć, że dowolne dwie klasy abstrakcji $\approx$ albo się pokrywają, albo są rozłączne. Na odwrót rozbicie klasy X na rodzinę zbiorów niepustych i rozłącznych $\{U_\xi\}_{\xi<\alpha}$ (takich, że $\bigcup_{\xi<\alpha} U_\xi = X$) wyznacza równoważność $\approx_0$ wzorem

$$x \approx_0 y \Leftrightarrow \text{istnieje } \xi < \alpha \text{ takie, że } x, y \in U_\xi.$$

Wówczas dla każdego x z X, gdy $x \in U_\xi$, to $[x]_{\approx_0} = U_\xi$. Można więc definiować równoważność przez wskazanie jakie obiekty są takie same ze względu na nią. Bo przecież w jednej klasie abstrakcji znajdują się obiekty takie same z punktu widzenia równoważności, a zatem same klasy można traktować jak abstrakty cech istotnych. Oczywiście — wprowadźmy rozbicie wszystkich krzywych na zawierające odcinek i nie zawierające żadnego odcinka. I cóż to za równoważność? Matematyczny model, opis, pozwala tworzyć abstrakcje, gdzie brak względu abstrakcji w potocznym sensie.

Zapewne łatwo zauważyć, że pewne klasyfikacje są dokładniejsze niż inne, inne znowu są niezależne. Przykłady dobrze znane to utożsamianie ze względu na adres zamieszkania, ze względu na województwo zamieszkania i ze względu na adres pracy. Dokładniejsza równoważność to taka, która daje drobniejszy podział na abstrakty, a więc

$$\approx_1 \text{ dokładniejsza niż } \approx_2 \Leftrightarrow \bigwedge_{x \in X} \quad [x]_{\approx_1} \subseteq [x]_{\approx_2}.$$

Nieco przeformułowując uzyskamy

$\approx_1$ dokładniejsza niż $\approx_2 \Leftrightarrow \bigwedge_{xy} (x \approx_1 y \Rightarrow x \approx_2 y)$, czyli

„dokładniejszość" to relacja zawierania: $\approx_1 \subseteq \approx_2$.

Dla dowolnych dwóch równoważności $\approx_1$ i $\approx_2$ na tym samym zbiorze X istnieje taka równoważność $\approx$, że $\approx \subseteq \approx_1$ i $\approx \subseteq \approx_2$ oraz dla każdej $\simeq$ równoważności zawartej w $\approx_1$ oraz $\approx_2$ mamy $\simeq \subseteq \approx$. Mówimy że $\approx$ jest kresem dolnym $\{\approx_1, \approx_2\}$ ze względu na relację $\subseteq$ i oznaczamy $\approx = \approx_1 \wedge \approx_2$. A dowód tego faktu jest nietrudny, bo wystarczy sprawdzić, że teoriomnogościowy iloczyn $\approx_1 \cap \approx_2$ jest relacją równoważności w X. Nieco mniej oczywiste jest, że dla dowolnej takiej pary równoważności $\approx_1$ i $\approx_2$ istnieje kres górny: tak niedokładna równoważność $\approx$, że $\approx_1$ i $\approx_2$ są zawarte w $\approx$ oraz gdy tylko równoważność $\simeq$ zawiera w sobie $\approx_1$ i $\approx_2$, to $\approx \subsetneq \simeq$. Można się odwołać do ogólnych twierdzeń, a można także skonstruować żądane $\approx$. Wystarczy zdefiniować $x \approx y \Leftrightarrow$ istnieje w X ciąg $x_0, \dots, x_n$ taki, że $x_n = y$, $x_0 = x$, dla $i = 1, \dots, n$ $\quad x_{i-1} \approx_{k_i} x_i$, gdzie $k_i = 1$ lub 2, i sprawdzić, że zdefiniowana tak relacja jest równoważnością. Zresztą tu na ogół $\approx$ jest różna od $\approx_1 \cup \approx_2$, a oznaczamy $\approx = \approx_1 \vee \approx_2$.

W rodzinie równoważności na X istnieje też element najmniejszy, najdokładniejszy — to równość — i największy, „najogólniejszy" — to $X \times X$. W ten sposób przekonaliśmy się, że rodzina równoważności tworzy, jak się to mówi, kratę z zerem i jednością. Więcej nawet nieco, bo kratę dystrybutywną, tzn. taką, że dla dowolnych równoważnośc $\approx_1, \approx_2$ i $\approx_3$ zachodzi

$$(\approx_1 \vee \approx_2) \wedge \approx_3 = (\approx_1 \wedge \approx_3) \vee (\approx_1 \wedge \approx_2), \quad (\approx_1 \wedge \approx_2) \vee \approx_3 = (\approx_1 \vee \approx_3) \wedge (\approx_2 \vee \approx_3).$$

Tu dowód jest już nieco żmudniejszy, choć podane definicje powinny wystarczyć uważnemu czytelnikowi. Ten rodzaj krat jest istotnie ważny — każda krata dystrybutywna daje się włożyć w kratę równoważności pewnego zbioru.

Do równoważności można podejść inaczej. Każdemu elementowi x ze zbioru X przypisujemy stopień (rodzaj) ustalonej własności. Elementy są równoważne, jeśli przypisaliśmy im ten sam stopień cechy. Formalnie: dana jest funkcja f na zbiorze X o wartościach w zbiorze Y. Definiując $x(\ker(f))y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ określiliśmy równoważność. Z drugiej strony każda równoważność $\approx$ na X jest postaci $\ker(f)$ dla pewnego f. Wystarczy zdefiniować: $f(x) = [x]_{\approx}$. Z pewnika wyboru wynika, że można rozpatrywać tylko funkcje o wartościach w X. Zastosujmy jeszcze raz powyższy chwyt: ker jest funkcją, której argumentami są funkcje.

$$\langle f, g\rangle \in \ker(\ker) \Leftrightarrow \ker(f) = \ker(g),$$

czyli f i g są równoważne, jeśli wyznaczają tę samą równoważność. Dokładniej więc, z pewnika wyboru wynika, że dla każdej funkcji f określonej na X istnieje g o wartościach w X taka, że $\langle f, g\rangle \in \ker(\ker)$. Dowód: wystarczy z każdej klasy $[x]_{\ker(f)}$ wybrać po jednym elemencie — $g(x)$.

Działania kratowe też można tu zinterpretować. Łatwo przeformułować warunek $\ker(f) \subseteq \ker(g)$ do postaci: $f(x) = f(y) \Rightarrow g(x) = g(y)$. Stąd można określić funkcję h ze zbioru $f(X)$ w $g(X)$ wzorem $h(z) = r \Leftrightarrow$ istnieje x w X takie, że $f(x) = z$ i $g(z) = r$ i okaże się, że $g = hf$. Na odwrót: gdy $g = hf$, to $\ker(f) \subseteq \ker(g)$. Sprawdzajmy dalej: szukamy takiego h, by $\langle x, y\rangle \in \ker(f) \wedge \ker(g) = \ker(f) \cap \ker(g) \Leftrightarrow (f(x) = f(y) \,\&\, g(x) = g(y)) \Leftrightarrow h(x) = h(y) \Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in \ker(h)$.

Zdefiniujmy: $h(x) = \langle f(x), g(x)\rangle$ i oznaczmy $h = f \times g$.

Wtedy $\ker(f) \wedge \ker(g) = \ker(f \times g)$.

Nieco trudniej jest z sumą. Tu istnienie funkcji h takiej, że $\ker(f) \vee \ker(g) = \ker(h)$, wynika z ogólnych rozważań, a samej konstrukcji daleko do elegancji.

Dalszym przykładem równoważności jest „przystawanie modulo grupa". Gdy G jest grupą przekształceń zbioru X, to definiujemy dla dowolnych $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \subseteq X$:

$$\mathcal{F}_1 \equiv_G \mathcal{F}_2 \Leftrightarrow \text{istnieje } f \text{ w } G \text{ takie, że } \mathcal{F}_2 = f(\mathcal{F}_1).$$

$\equiv_G$ jest relacją równoważności.

Z konstrukcją taką spotykamy się szczególnie często w geometrii, wtedy G jest pewną podgrupą grupy podobieństw — grupy $\boldsymbol{Sim}$. Łatwo okazać, że

$$\text{gdy } G_1, G_2 \subseteq \boldsymbol{Sim}, \text{ to } \equiv_{G_1} = \equiv_{G_2} \Rightarrow G_1 = G_2.$$

Weźmy bowiem dowolny trójkąt $\langle a, b, c\rangle$ i klasę $[\{\langle a, b, c\rangle\}]_{\equiv G_1}$. Gdy $f(a, b, c) = (a', b', c')$, $f \in G_1$, to powinienem znaleźć w G_2 takie h, że $(a', b', c') = h(a, b, c)$. Ale wówczas $f = h$, czyli $f \in G_2$. Dalej okazuje się, że $\equiv_{G_1} \wedge \equiv_{G_2} = \equiv_{G_1 \cap G_2}$ i, ogólniej — krata przystawań modulo podgrupy grupy podobieństw jest izomorficzna z kratą podgrup grupy podobieństw.

Dr Krzysztof PRAŻMOWSKI