Podstawowe prawa elektrodynamiki – część druga

Doc. dr Andrzej SZYMACHA

Przypomnijmy podstawowe prawa rządzące niezależnymi od czasu polami elektrycznymi i magnetycznymi (Delta 8/1979).

$$\text{(1)}\quad \underset{\text{(zamknięta powierzchnia)}}{\text{Strumień } E} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q \text{ (obejmowany przez tę powierzchnię)}$$

$$\text{(2)}\quad \underset{\text{(zamknięta powierzchnia)}}{\text{Strumień } \boldsymbol{B}} = 0$$

$$\text{(3)}\quad \underset{\text{(zamknięty kontur)}}{\text{Krążenie } E} = 0$$

$$\text{(4)}\quad \underset{\text{(zamknięty kontur } K)}{\text{Krążenie } \boldsymbol{B}} = \underset{\text{(przez płat rozpięty na } K)}{\mu_0 \text{ strumień } j}$$

Naturalne pytanie, jakie nasuwa się w związku z tymi prawami, brzmi: czy prawa te zachowują swą słuszność, gdy sytuacja fizyczna nie jest ustalona, lecz zmienia się w czasie? Przez zmianę sytuacji możemy tu rozumieć zwiększanie lub zmniejszanie natężenia prądu wytwarzającego pole magnetyczne, lub zmianę konfiguracji ładunków wytwarzających pole elektryczne. Częściowej odpowiedzi na to pytanie udzielił już Faraday w latach 30-ych XIX w., odkrywając doświadczalnie zjawisko indukcji elektromagnetycznej. Zjawisko indukcji elektromagnetycznej polega, jak wiadomo, na pojawieniu się w obwodzie elektrycznym zamkniętym dodatkowej siły elektromotorycznej, ilekroć strumień magnetyczny obejmowany przez ten obwód jest zmienny w czasie. Ilościowo

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}.$$

Prawo Faradaya można stosować dla dwóch zasadniczo odmiennych sytuacji. Po pierwsze, strumień magnetyczny obejmowany przez obwód może się zmieniać wskutek ruchu (lub deformacji) przewodnika tworzącego ten obwód w niezmiennym polu magnetycznym. Po drugie, strumień może się zmieniać nawet dla nieruchomego obwodu, jeśli wartość pola magnetycznego w różnych punktach przestrzeni zależy od czasu. Jest faktem doświadczalnym, że w obu tych przypadkach obowiązuje ten sam wzór $\varepsilon = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$. W dotychczas sformułowanym języku te dwa przypadki musimy opisywać przy pomocy dwóch różnych mechanizmów.

Sytuację pierwszą, gdy przewodnik porusza się w polu magnetycznym nie zależnym od czasu, możemy łatwo zrozumieć uświadamiając sobie, że ruch przewodnika nadaje pewną prędkość elektronom w nim się znajdującym. Tym samym, zgodnie z wzorem Lorentza, na elektrony zaczyna działać siła $e\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$, gdzie $\boldsymbol{v}$ jest prędkością przewodnika. Siła ta zmusza elektrony do ruchu wokół obwodu wbrew siłom oporu. Praca tej siły wzdłuż całego obwodu wykonana nad jednostkowym ładunkiem, to zgodnie z definicją siła elektromotoryczna. Łatwo dowieść, że równa się ona właśnie $\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$. Dowód można znaleźć w standardowym podręczniku szkolnym.

Zatem w zastosowaniu do tych sytuacji prawo Faradaya nie jest niczym szczególnie nowym. Można powiedzieć, że gdyby historia nieco inaczej się potoczyła, prawo to łatwo mogłoby być przepowiedziane teoretycznie.

Przypadek drugi, pola zależnego od czasu i nieruchomego obwodu, jest znacznie ciekawszy. Ponieważ przewodnik jest nieruchomy, nie możemy siły elektromotorycznej wiązać teraz z pracą siły Lorentza, czyli siły pochodzącej od pola magnetycznego. Praca jednak jest wykonywana, i nie robią tego krasnoludki! Musimy przyjąć, że w przypadku nieruchomego przewodnika w zmiennym polu magnetycznym siła elektromotoryczna jest pracą (nad jednostkowym ładunkiem) sił pola elektrycznego wzdłuż obwodu.

$$\text{Zatem}\quad \underset{\text{(wzdłuż konturu } K)}{\text{Krążenie } E} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underset{\text{(przez płat rozpięty na } K)}{\text{strumień } \boldsymbol{B}} = \text{strumień}\left(-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}\right).$$

W przypadku pól zmiennych, trzecie z podanych na początku tego artykułu praw musimy zastąpić powyższym. W podanym powyżej sformułowaniu nosi ono nazwę pierwszego prawa Maxwella. Czy to jest jednak jedyna niezbędna zmiana w poznanych prawach, konieczna by dostosować je do najogólniejszej sytuacji, gdy wszystkie wielkości zależą od czasu? To właśnie pytanie postawił sobie Maxwell około roku 1864. W przeciwieństwie do Faradaya rozwiązał problem na drodze czysto teoretycznej, bez prób doświadczalnych w tym kierunku.

Żeby zrozumieć ideę Maxwella, musimy najpierw omówić dwie sprawy. Pierwsza to pewne czysto matematyczne własności równania wiążącego krążenie pewnego pola wektorowego ze strumieniem innego pola. Taką właśnie strukturę ma zarówno prawo Ampera (4), jak i wyprowadzone przed chwilą z prawa Faradaya I prawo Maxwella. Drugi potrzebny element to prawo zachowania ładunku.

W równaniu wiążącym krążenie ze strumieniem uderzyć może pewna pozorna nielogiczność.

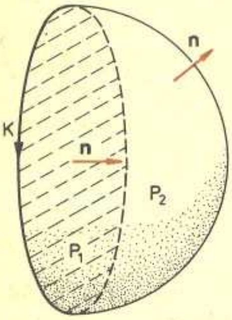
Kącik filatelistyczny (11)

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) był niemieckim matematykiem i filozofem. Stworzył, niezależnie od Newtona, podstawy rachunku różniczkowego i całkowego. Wprowadził matematykę do logiki, którą traktował jako pewien rachunek. Był także organizatorem życia naukowego w Niemczech — w 1700 r. założył Akademię Nauk w Berlinie. Jako ciekawostkę podamy, że poza matematyką i filozofią Leibniz interesował się również polityką i m.in. napisał traktat na temat elekcji króla w Polsce w latach 1668-69. Znaczki z podobizną G. W. Leibniza wydano w Niemczech w roku 1927, w NRD w roku 1950 (w 250 rocznicę założenia Niemieckiej Akademii Nauk) i w RFN w roku 1966 (w 250 rocznicę śmierci uczonego). Reprodukujemy ten ostatni znaczek.

Jerzy BARTKE

Wszak przy zadanym polu krążenie zależy tylko i wyłącznie od wybranego konturu. Natomiast aby obliczyć strumień, należy wybrać określony płat. Istnieje jednak nieskończenie wiele płatów rozpiętych na danym konturze! Sprzeczności unikniemy pod jednym tylko warunkiem, jeśli pole, którego strumień nas interesuje, ma tę szczególną własność, że jego strumień przez różne płaty rozpięte na tym samym konturze jest taki sam. Niezależność strumienia od płatu można sformułować inaczej. Weźmy bowiem kontur K i dwa jakiekolwiek rozpięte na nim płaty. Wektor normalny na każdym z płatów kierujemy w tę samą stronę względem orientacji konturu. Płaty P_1 i P_2 ograniczają pewien obszar przestrzeni. Wektor $\boldsymbol{n}$ na P_2 skierowany jest na zewnątrz tego obszaru, a wektor $\boldsymbol{n}$ na P_1 do wewnątrz. Oznaczmy strumień przez płat P_1 literą Φ_1, a strumień przez płat P_2 literą Φ_2. Mamy $\Phi_2 - \Phi_1 = 0$.

Mówiąc kontur mamy na myśli nie tylko geometryczną krzywą, ale i określony jeden z dwóch możliwych kierunków jej obchodzenia (orientację).



Ale $-\Phi_1$ to strumień przez płat P_1 z wektorem $-\boldsymbol{n}$ (też skierowanym na zewnątrz). $\Phi_2 - \Phi_1$ to zatem nic innego, jak całkowity strumień wypływający z obszaru zawartego między P_1 i P_2. Niezależność strumienia od płatu rozpiętego na danym konturze oznacza znikanie strumienia pola wektorowego przez każdą powierzchnię zamkniętą.

Patrząc z tego punktu widzenia na I prawo Maxwella, w którym występuje strumień pola magnetycznego, widzimy, że wszystko jest w porządku, bowiem na mocy prawa (2) pole magnetyczne ma tę przyjemną własność. Sprzeczności nie ma, a zarazem zyskujemy sugestię, że prawo o znikaniu strumienia magnetycznego przez każdą zamkniętą powierzchnię powinno pozostać bez zmiany przy przejściu do teorii pól zależnych od czasu.

A co z prawem Ampera (4)? Występuje w nim strumień gęstości prądu $\boldsymbol{j}$. Czy i ten strumień znika przez każdą zamkniętą powierzchnię? W przypadku prądów stacjonarnych tak. Strumień gęstości prądu przez zamkniętą powierzchnię równy jest liczbowo ładunkowi, jaki w jednostce czasu wypływa z objętości ograniczonej tą powierzchnią. Dla prądów stałych, płynących dowolnie długo, z danego obszaru tyle ładunku wypływa, ile doń wpływa — czyli strumień całkowity wynosi właśnie zero. Jest to nic innego, jak znane dobrze pierwsze prawo Kirchhoffa, formułowane w szkole dla obszaru otaczającego rozgałęzienie przewodów. Znikanie strumienia gęstości prądu wyraża prawo zachowania ładunku dla sytuacji stacjonarnej. Gdyby ładunek mógł powstawać z niczego, to rodząc się stale w pewnym obszarze mógłby stale zeń wypływać, a jego ilość w rozpatrywanym obszarze nie zmieniałaby się. Wtedy mielibyśmy kłopot z prawem Ampera. Na szczęście ładunek jest zachowany.

Ale co będzie w przypadku sytuacji niestacjonarnej, jeśli ilość ładunku w danym obszarze przestrzeni może być raz większa, raz mniejsza? Oczywiście teraz całkowity strumień $\boldsymbol{j}$ przez powierzchnię ograniczającą ten obszar jest różny od zera — kiedy ładunku ubywa, strumień jest dodatni, kiedy go znów przybywa, strumień jest ujemny.

W powyższym zdaniu zawarliśmy znów treść odpowiadającą prawu zachowania ładunku. Skoro ładunek nie ginie bez śladu, ani nie powstaje z niczego, to właśnie strumień $\boldsymbol{j}$ w danej chwili równa się szybkości ubywania ładunku. Ładunek maleje tylko dzięki temu, że dokładnie tyleż go wypływa przez powierzchnię.

$$\text{Strumień } \boldsymbol{j} = -\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}.$$

W sytuacji stacjonarnej wszystkie pochodne względem czasu równają się zeru i powyższe ogólne prawo zachowania redukuje się do znikania strumienia $\boldsymbol{j}$.

W ogólności jednak, gdy $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \neq 0$, strumień $\boldsymbol{j}$ nie znika i prawo Ampera traci sens.

To właśnie zauważył Maxwell.

Skoro prawo Ampera w podanej postaci traci sens, gdy $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \neq 0$, to trzeba je niewątpliwie zmienić.

Zauważając, że zgodnie z prawem Gaussa (1) $\quad \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \varepsilon_0 \text{ strumień } \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{E}}{\mathrm{d}t},$

możemy ogólne prawo zachowania ładunku zapisać w postaci strumień $\left[\boldsymbol{j} + \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{E}}{\mathrm{d}t}\right] = 0.$

A zatem wektor $\boldsymbol{j} + \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{E}}{\mathrm{d}t}$ ma w najogólniejszym przypadku znikający strumień przez każdą zamkniętą powierzchnię. Innymi słowy, strumień tej sumy zależy tylko od danego konturu, a nie od płatu, który na tym konturze rozepniemy. Własność ta zasugerowała Maxwellowi, że ten właśnie wektor powinien być wstawiony do prawa Ampera w miejsce samego $\boldsymbol{j}$, które tam dotychczas występowało: $\quad \text{Krążenie } \boldsymbol{B} = \mu_0 \text{ strumień} \left(\boldsymbol{j} + \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{E}}{\mathrm{d}t}\right).$

Powyższe prawo nosi nazwę II prawa Maxwella i jest matematycznie najprostszym uogólnieniem prawa Ampera usuwającym sprzeczność, o której wspominaliśmy.

Ponieważ w sformułowaniu prawa zachowania ładunku korzystaliśmy z prawa Gaussa, to znów wydaje się, że prawo to nie powinno ulec zmianie dla sytuacji zależnych od czasu (bez wywołania całego łańcucha kolejnej modyfikacji II prawa Maxwella itd.). Jest to znów argument o charakterze prostoty matematycznej.

Czytelnicy proponują

Pan *Andrzej MOJSKI* z Sopotu przysłał list, w którym dowodzi, że prawdziwa jest następująca zależność

$$1 + 2\cdot(1{,}1) + 3\cdot(1{,}1)^2 + \ldots + 9\cdot(1{,}1)^8 + 10\cdot(1{,}1)^9 = 10^2$$

lub ogólniej

$$\sum_{j=1}^{n} j\left(\frac{n+1}{n}\right)^{j-1} = n^2.$$

Równość tę możemy otrzymać, różniczkując wzór na sumę ciągu geometrycznego

$$\sum_{j=1}^{n} x^j = \frac{x^{n+1} - x}{x-1}$$

i podstawiając w otrzymanej równości $x = \frac{n+1}{n}$.

Przepiszemy jeszcze raz zaproponowany przez Maxwella zestaw kompletnych równań elektromagnetyzmu

$$\text{I. } \underset{\text{(kontur zamkn.)}}{\text{Krążenie } \boldsymbol{E}} = -\text{strumień}\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t} \qquad \text{III. } \underset{\text{(pow. zamkn.)}}{\text{Strumień } \boldsymbol{E}} = \frac{1}{\varepsilon_0}Q$$

$$\text{II. } \underset{\text{(kontur zamkn.)}}{\text{Krążenie } \boldsymbol{B}} = \mu_0 \text{ strumień}\left(\boldsymbol{j}+\varepsilon_0\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{E}}{\mathrm{d}t}\right) \qquad \text{IV. } \underset{\text{(pow. zamkn.)}}{\text{Strumień } \boldsymbol{B}} = 0.$$

Równania powyższe noszą nazwę równań Maxwella. Są to jedne z najważniejszych równań fizyki.

Najważniejszą konsekwencją nowego członu dopisanego przez Maxwella na podstawie argumentów teoretycznych jest to, że teraz równania te dopuszczają istnienie różnych od zera rozwiązań nawet wtedy, gdy $Q = 0$ i $\boldsymbol{j} = 0$.

Jeżeli na przykład włączyliśmy na pewien czas prąd zmienny w pewnym obwodzie (nazwijmy go anteną), a potem prąd ten wyłączyliśmy, to od tego momentu rzeczywiście $Q = 0$ i $\boldsymbol{j} = 0$. Gdyby nie było członu Maxwella $\varepsilon_0\mu_0\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{E}}{\mathrm{d}t}$, to mielibyśmy strumień $\boldsymbol{B} = 0$, krążenie $\boldsymbol{B} = 0$.

Można dowieść, że jeśli zarówno krążenie jak i strumień pola (przez każdy zamknięty kontur i każdą zamkniętą powierzchnię) są równe zeru, to pole takie jest tożsamościowo równe zeru. Bez członu Maxwella dostalibyśmy po wyłączeniu prądu w antenie: $\boldsymbol{B} = 0$. Wstawiając tę wartość do I prawa Maxwella i korzystając z prawa Gaussa (III) napisalibyśmy strumień $\boldsymbol{E} = 0$, krążenie $\boldsymbol{E} = 0$.

Zatem musiałoby być $\boldsymbol{E} = 0$. Nie istniałyby żadne fale. Z członem Maxwella sytuacja jest inna. Nawet po położeniu $Q = 0, \boldsymbol{j} = 0$ równania dopuszczają różne od zera rozwiązania opisujące sytuację np. po wyłączeniu prądu. Sprawdźmy to w pewnym szczególnym przypadku. Przekonamy się, że może istnieć wędrujący w przestrzeni obszar, gdzie zarówno pole $\boldsymbol{E}$ jak i pole $\boldsymbol{B}$ są różne od zera. Wyznaczymy jednocześnie szybkość przesuwania się tego obszaru. Rysunek przedstawia dwie równoległe płaszczyzny poruszające się w kierunku do nich prostopadłym z prędkością $\boldsymbol{v}$. Wprowadzamy ponadto ustalony układ odniesienia. Nasze wędrujące płaszczyzny są równoległe do płaszczyzny xy, a kierunek ich poruszania się jest kierunkiem osi z.

Twierdzimy, że konfiguracja, w której pola $\boldsymbol{E}$ i $\boldsymbol{B}$ są równe zeru na zewnątrz płaszczyzn, a wewnątrz przyjmują wartości $\boldsymbol{E} = (E_x, 0, 0)$, $\quad \boldsymbol{B} = (0, B_y, 0)$ spełnia wszystkie równania Maxwella, o ile prędkość v i stosunek $\frac{E_x}{B_y}$ są odpowiednio dobrane.

Ze strumieniami pól $\boldsymbol{E}$ i $\boldsymbol{B}$ przez zamkniętą powierzchnię nie ma problemu, gdyż linie sił pól $\boldsymbol{E}$ i $\boldsymbol{B}$ są liniami prostymi i każdą zamkniętą powierzchnię przecinają parzystą ilość razy — wchodząc i wychodząc. Kluczowe są pozostałe dwa prawa, tj. I i II prawo Maxwella.

Rozpatrzmy dwa nieruchome kontury K_1 i K_2 zaznaczone na rysunku. Są one tak usytuowane, że w danej chwili znajdują się częściowo w obszarze, gdzie pola są różne od zera, a częściowo w obszarze na zewnątrz płaszczyzn. Obliczmy krążenie pola $\boldsymbol{B}$ wzdłuż konturu K_2. Odczytujemy z rysunku, że wynosi ono $+B_y \cdot a$. Strumień pola $\boldsymbol{E}$ jest zależny od czasu, gdyż w miarę upływu czasu pole $\boldsymbol{E}$ przenika przez coraz większą część (zacieniowaną na rysunku) prostokąta K_2. Szybkość zmian tego strumienia wynosi oczywiście $v \cdot a \cdot E_x$.

Na mocy II prawa Maxwella musi być $aB_y = \varepsilon_0\mu_0 vaE_x$.

Podobnie dla konturu K_1 stosujemy I prawo Maxwella dostając $aE_x = vaB_y$ (krążenie $\boldsymbol{E}$ wynosi $-aE_x$, w I prawie jest jeszcze jeden znak minus).

Podstawiając E_x z drugiego równania do pierwszego mamy

$$B_y = \varepsilon_0\mu_0 v \cdot vB_y, \qquad \text{skąd} \qquad v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}.$$

Przypomnijmy w tym miejscu, że w układzie SI amper zdefiniowany jest przez wybór stałej μ_0 jako pewnej „okrągłej" liczby, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$.

Stała ε_0 występująca w prawie Gaussa (i Coulomba) musi być wyznaczona z pomiarów siły między znanymi ładunkami wyrażonymi w kulombach. Jej wartość wynosi

$$\varepsilon_0 = 8{,}84 \cdot 10^{-12}.$$

Podstawiając dostajemy $v = 3 \cdot 10^8 \,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Rachunek ten wykonał Maxwell (oczywiście nie w układzie SI, ale nie zmienia to istoty rzeczy). Zbieżność otrzymanej liczby ze znaną z zupełnie innych pomiarów prędkością światła ma oczywistą interpretację. Światło, to tajemnicze światło, którego natury nie mogły przeniknąć najtęższe umysły fizyków i filozofów żyjących przed Maxwellem, to nic innego, tylko fale elektromagnetyczne! Ale fale mogą mieć różne długości. W odróżnieniu od światła, które jest generowane drganiami ładunków wewnątrz atomów, fale o większych długościach mogą być i są generowane drganiami ładunków w obwodach makroskopowych (antenach). Uzyskał je w pracowni po raz pierwszy Hertz w 25 lat po ogłoszeniu teorii Maxwella (Maxwell nie dożył już tego triumfu swojej teorii). Słuchając radia czy oglądając telewizję nie mamy wątpliwości, że fale te istnieją.

Rozwiązanie zadania M 205

Przypuśćmy, że $p(x)-1 = q(x)\cdot r(x)$, gdzie st $q <$ st p, st $r <$ st p i współczynniki wielomianów q oraz r są całkowite. Dla wszystkich pierwiastków wielomianu p mamy $q(x_i)\cdot r(x_i) = p(x_i)-1 = -1$. Wynika stąd, że $q(x_i) = -r(x_i) = \pm 1$, bo wartości $q(x_i)$, $r(x_i)$ są całkowite. Wielomian $q(x)+r(x)$ stopnia mniejszego niż n ma więc n różnych pierwiastków, co jest możliwe tylko, gdy jest wielomianem zerowym. A zatem $q(x) = -r(x)$ i $p(x)-1 = -(q(x))^2$, co jest niemożliwe, ponieważ najwyższym współczynnikiem wielomianu p jest 1.