O równaniu ruchu rakiety kosmicznej

Prof. dr Jacek SZARSKI członek korespondent PAN

Drugie prawo mechaniki Newtona orzeka, że dla dowolnego ciała C pochodna jego pędu, traktowanego jako funkcja czasu, jest równa sumie sił działających na to ciało. Jeżeli więc oznaczymy przez $\boldsymbol{p}(t)$ pęd ciała C w chwili t (wektory będziemy zaznaczać tłustym drukiem), a przez $\boldsymbol{F}$ sumę działających na nie sił, to otrzymamy następującą postać matematyczną drugiego prawa Newtona

$$\dot{\boldsymbol{p}}(t) = \boldsymbol{F}. \tag{1}$$

Kropka nad symbolem funkcji oznacza — zgodnie z przyjętą w mechanice umową — pochodną względem czasu. Równanie (1) jest równaniem różniczkowym w postaci wektorowej, tj. równaniem, w którym niewiadomą jest funkcja wektorowa występująca wraz ze swą pochodną. Przechodząc do współrzędnych wektorów można je zapisać w postaci układu trzech równań różniczkowych skalarnych. Z równań tych można, znając $\boldsymbol{F}$ oraz wartość początkową pędu np. w chwili 0, tzn. znając $\boldsymbol{p}(0)$, wyznaczyć funkcję $\boldsymbol{p}$, a więc pęd ciała C.

Równaniu (1) nadamy jeszcze inną postać, ale w tym celu wypada sprecyzować pewne, istotne w dalszym ciągu, wiadomości z mechaniki.

Jako model matematyczny ciała fizycznego przyjmiemy skończony układ punktów materialnych. Jak można wyobrazić sobie „realizację" takiego modelu? Otóż, dzieląc ciało fizyczne C na skończoną ilość małych bryłek, można następnie przyjąć, że każda taka bryłka zostaje zastąpio przez punkt materialny o masie odnośnej bryłki, i w ten sposób powstaje skończony układ punktów materialnych, który aproksymuje ciało C. Intuicyjnie jest dość oczywiste, że aproksymacja ta jest tym lepsza, im ilość bryłek częściowych jest większa, a ich objętości są mniejsze.

Weźmy pod uwagę ciało C, złożone z N punktów materialnych o masach $m_1, \ldots, m_N$. Masa ciała C równa się oczywiście

$$m = \sum_{j=1}^{N} m_j. \tag{2}$$

Oznaczmy przez $\boldsymbol{r}_j(t)$ wektor zaczepiony w początku ustalonego inercjalnego układu odniesienia, którego końcem jest pozycja j-tego punktu materialnego w chwili t. Wówczas wektor $\boldsymbol{V}_j(t) = \dot{\boldsymbol{r}}_j(t)$ jest prędkością j-tego punktu w chwili t. Pędem $\boldsymbol{p}(t)$ ciała C w chwili t jest suma pędów poszczególnych punktów materialnych tzn.

$$\boldsymbol{p}(t) = \sum_{j=1}^{N} m_j \boldsymbol{V}_j(t). \tag{3}$$

Jest widoczne, że jeśli ciało C potraktujemy jako zespół dwóch ciał, np. ciała C_1 złożonego z punktów $m_1, \ldots, m_n$ i ciała C_2 złożonego z punktów $m_{n+1}, \ldots, m_N$, to pęd ciała C w dowolnej chwili jest sumą pędów ciał składowych C_1 i C_2. W dalszym ciągu każde ciało złożone z części punktów ciała C będziemy nazywali częścią ciała C.

Wśród sił działających na punkty ciała C, siły, które pochodzą od wzajemnego oddziaływania między punktami ciała C, nazywamy siłami wewnętrznymi (ze względu na ciało C). O tych siłach zakładamy, że podlegają trzeciemu prawu mechaniki Newtona (prawo akcji i reakcji), skąd wynika, że suma sił wewnętrznych jest wektorem zerowym. Jeśli więc siły działające na punkty ciała C i nie będące siłami wewnętrznymi nazwiemy siłami zewnętrznymi (względem ciała C), to suma wszystkich sił działających na ciało C jest równa sumie sił zewnętrznych.

W równaniu (1) wektor $\boldsymbol{F}$ jest zatem sumą sił zewnętrznych.

Punkt materialny o masie m, danej wzorem (2), którego pozycją w chwili t jest koniec wektora

$$\boldsymbol{r}(t) = m^{-1} \sum_{j=1}^{N} m_j \boldsymbol{r}_j(t),$$

nazywamy środkiem masy ciała C. Z definicji tej wynika, że prędkość $\boldsymbol{V}(t)$ środka masy w chwili t jest dana wzorem

$$\boldsymbol{V}(t) = \dot{\boldsymbol{r}}(t) = m^{-1} \sum_{j=1}^{N} m_j \dot{\boldsymbol{r}}_j(t) = m^{-1} \sum_{j=1}^{N} m_j \boldsymbol{V}_j(t).$$

Stąd i ze wzoru (3) dostajemy

$$\boldsymbol{p}(t) = m\boldsymbol{V}(t). \tag{4}$$

Wzór (4) pozwala zapisać równanie (1) w postaci równoważnej

$$m\dot{\boldsymbol{V}}(t) = \boldsymbol{F}, \tag{5}$$

gdzie $\boldsymbol{V}(t)$ jest — jak pamiętamy — prędkością środka masy ciała C w chwili t, a $\boldsymbol{F}$ jest sumą sił zewnętrznych działających na ciało C. $\dot{V}(t)$ jest oczywiście przyspieszeniem środka masy. Równanie (5) rządzi ruchem każdego ciała, a więc także i rakiety. Tymczasem — jak zobaczymy — równanie, które nazywamy równaniem ruchu rakiety, jest w sposób istotny różne od równania (5). Otóż celem niniejszego artykułu jest wyprowadzenie wspomnianego równania i wyjaśnienie jego pozornej rozbieżności z równaniem (5).

W dalszym ciągu przez rakietę rozumieć będziemy ciało, które stanowi rakieta właściwa wraz z paliwem w chwili startu oraz wraz z ewentualnym statkiem kosmicznym zawierającym pasażerów i całe wyposażenie. Równanie, które wyprowadzimy, obowiązuje tak długo, jak działają silniki odrzutowe, przy czym — jak się okaże — w tej sytuacji istotną rolę odgrywa fakt, że ilość paliwa zużywana w jednostce czasu oraz prędkość wylotu gazów z silnika odrzutowego są bardzo duże.

Wprowadzimy teraz pewne definicje i oznaczenia. Przez część użyteczną $C(t)$ rakiety w chwili t rozumieć będziemy część rakiety złożoną z tych punktów, które nie wchodzą w skład paliwa zużytego od chwili startu do chwili t. Podkreślić wypada z naciskiem, że część użyteczną rakiety $C(t)$ możemy obserwować w dowolnej chwili różnej od chwili t, przy czym jest to stale ten sam podzbiór punktów rakiety. Przy ustalonym t, $C(t)$ nie zależy więc od chwili obserwacji, natomiast zmienia się wraz ze zmianą t.

Dla części użytecznej $C(t)$ oznaczmy prędkość jej środka masy w chwili t przez $v(t)$. Oznaczmy dalej przez $P(t, h)$, gdzie $h > 0$, tę część rakiety, która składa się z paliwa zużytego od chwili t do chwili $t+h$. Uwaga, którą zrobiliśmy przed chwilą w odniesieniu do $C(t)$, przenosi się na $P(t, h)$; mianowicie, zbiór punktów $P(t, h)$ przy ustalonych wartościach t i h nie zależy od chwili obserwacji i zmienia się dopiero przy zmianie t lub h.

Przy powyższych oznaczeniach jest widoczne, że $C(t)$ (część użyteczna rakiety w chwili t) jest zespołem dwóch ciał, złożonym z $C(t+h)$ (część użyteczna rakiety w chwili $t+h$) i z $P(t, h)$ (paliwo zużyte od chwili t do chwili $t+h$). Jeśli oznaczymy jeszcze przez $m(t)$ masę $C(t)$, to jest oczywiste, że masa części $P(t, h)$ jest równa różnicy mas części $C(t)$ i części $C(t+h)$, tzn. masa $P(t, h)$ wynosi $m(t)-m(t+h)$.

Oznaczmy wreszcie przez $u(t, h)$ prędkość w chwili $t+h$ środka masy części $P(t, h)$ rakiety. W dalszym ciągu założymy, że funkcje $v(t)$ i $m(t)$ są różniczkowalne, oraz że istnieje granica

$$\lim_{h\to 0} u(t, h) = u(t). \tag{6}$$

Granicę tę nazywamy prędkością w chwili t wylotu gazów z silnika odrzutowego. Powyższe założenia są w przyjętym przez nas modelu rakiety (skończony układ punktów) spełnione z tym lepszym przybliżeniem, im więcej jest punktów wchodzących w skład rakiety i im mniejsze są ich masy.

Postaramy się teraz obliczyć pochodną w chwili t pędu części $C(t)$ rakiety. Utworzymy w tym celu iloraz różnicowy pędu i przejdziemy do granicy 0 z przyrostem czasu h. Otóż pęd części $C(t)$ w chwili t wynosi (zgodnie ze wzorem (4) i przy wprowadzonych przez nas oznaczeniach)

$$m(t)v(t).$$

Pęd tejże części $C(t)$ w chwili $t+h$ jest (zgodnie z poprzednio uczynioną uwagą) sumą pędu w chwili $t+h$ części $C(t+h)$ oraz pędu w chwili $t+h$ części $P(t, h)$, tzn. wynosi

$$m(t+h)v(t+h)+\big(m(t)-m(t+h)\big)u(t, h).$$

Wspomniany wyżej iloraz różnicowy można więc zapisać w postaci

$h^{-1}[m(t+h)v(t+h)+\big(m(t)-m(t+h)\big)u(t, h)-m(t)v(t)]$, lub po prostym przekształceniu

$$h^{-1}[m(t+h)v(t+h)-m(t)v(t)]-h^{-1}\big(m(t+h)-m(t)\big)u(t, h).$$

Przy $h \to 0$ dostajemy w granicy szukaną pochodną w chwili t pędu części użytecznej $C(t)$ rakiety. Przy naszych założeniach i oznaczeniu (6) granica ta równa się $\dfrac{d}{dt}[m(t)v(t)]-\dot{m}(t)u(t)$, lub po przekształceniu

$$m(t)\dot{v}(t)-w(t)\dot{m}(t), \tag{7}$$

gdzie $w(t) = u(t)-v(t)$ jest — zgodnie z określeniem $u(t)$ — prędkością w chwili t wylotu gazów względem środka masy części użytecznej $C(t)$ rakiety.

Ponieważ równanie (1) obowiązuje w dowolnej chwili t dla dowolnego ciała, zatem stosując je w chwili t do ciała $C(t)$ dostajemy na podstawie wzoru (7) określającego pochodną w chwili t pędu ciała $C(t)$

$$m(t)\dot{v}(t)-w(t)\dot{m}(t) = F(t), \tag{8}$$

gdzie F jest sumą sił zewnętrznych względem $C(t)$.

Równanie (8) jest właśnie równaniem, o którym mowa w tytule artykułu. Różni się ono formalnie od równania (5) o składnik

$$-w(t)\dot{m}(t). \tag{9}$$

Skąd ta rozbieżność między równaniem (5) i (8)? Odpowiedź na to pytanie jest bardzo prosta.

Rozwiązanie zadania M 206

Rozumując podobnie, jak w przypadku M 205, przekonamy się, że $p(x)+1$ musi być kwadratem pewnego trójmianu kwadratowego o współczynnikach całkowitych $q(x) = x^2+mx+n$, czyli $p(x) = (q(x))^2-1 = (q(x)+1)(q(x)-1)$, przy czym trójmiany $q_1(x) = q(x)+1$ i $q_2(x) = q(x)-1$ mają po dwa różne pierwiastki całkowite. Wynika stąd, że ich wyróżniki Δ_1 i Δ_2 są kwadratami liczb całkowitych. Ale $\Delta_2 = \Delta_1+8$, jedyną możliwością jest więc $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = 9$.

Pierwiastkami q_1 są wtedy $\dfrac{-m-1}{2}$ i $\dfrac{-m+1}{2}$, pierwiastkami q_2 są $\dfrac{-m-3}{2}$ i $\dfrac{-m+3}{2}$.

Pierwiastki te są całkowite, gdy m jest postaci $2k+1$ i wtedy szukanym wielomianem jest $p(x) = (x+k-2)(x+k+1)(x+k-1)(x+k)$. Tak więc jedynymi wielomianami spełniającymi warunki zadania są wielomiany, których pierwiastkami są cztery kolejne liczby całkowite.

W równaniu (5) wektor $V(t)$ oznacza prędkość środka masy stale tego samego ciała; natomiast w równaniu (8) wektor $\boldsymbol{v}(t)$ oznacza prędkość w chwili t środka masy części użytecznej $C(t)$ rakiety, a więc wraz ze zmianą t coraz to innego ciała (innej części rakiety).

W tym miejscu powstaje jednak następne pytanie. W naszym rozumowaniu nigdzie nie korzystaliśmy z tego, że chodzi o rakietę poruszaną silnikami odrzutowymi; rakietą mógł być równie dobrze np. samochód poruszany zwykłym silnikiem tłokowym. Dlaczego więc w przypadku rakiety kosmicznej posługujemy się równaniem (8), a w przypadku samochodu używamy równania (5)? Odpowiedź na to pytanie jest również łatwa. Oba czynniki $\boldsymbol{w}(t)$, tj. prędkość wylotu gazów z silnika, oraz $\dot{m}(t)$, tj. prędkość zużycia paliwa, mają w sytuacji rakiety kosmicznej bardzo duże wartości bezwzględne, wobec czego człon (9) w równaniu (8) gra istotną rolę; natomiast w przypadku samochodu wartości bezwzględne obu tych czynników są bardzo małe i dlatego składnik (9) można pominąć i w ten sposób dostać równanie (5). Z uwagi tej wynika następujący wniosek: w przypadku samochodu równanie (8) stanowi lepsze przybliżenie rzeczywistości fizycznej, ponieważ jednak z punktu widzenia praktycznych zastosowań ta lepsza aproksymacja nie ma istotnego znaczenia, dlatego posługujemy się prostszym równaniem (5).

Obecnie poświęcimy jeszcze trochę uwagi szczególnej sytuacji, dla nas mieszkańców Ziemi bardzo ważnej, gdy chodzi o rakietę kosmiczną wystrzeloną z powierzchni Ziemi pionowo do góry. Oznaczając przez $v(t)$, $w(t)$ i $F(t)$ miary rzutów wektorów $\boldsymbol{v}(t)$, $\boldsymbol{w}(t)$ i $\boldsymbol{F}(t)$ na oś skierowaną pionowo do góry i zakładając, że $|\boldsymbol{w}(t)| = w = \text{const}$, dostajemy z (8) równanie skalarne

$$m(t)\dot{v}(t)+w\dot{m}(t) = F(t). \tag{10}$$

Zastanówmy się, co w tym przypadku składa się na wielkość $F(t)$, która jest miarą rzutu sumy sił zewnętrznych ze względu na część użyteczną $C(t)$ rakiety. Otóż, siła odrzutu w chwili t jest siłą wewnętrzną ze względu na $C(t)$; jeśli więc pominiemy opór powietrza, to na F składa się wyłącznie siła przyciągania ziemskiego, tzn. $F = -m(t)g$, gdzie g jest skalarnym przyspieszeniem ziemskim. Ostatecznie równanie (10) przyjmuje postać $m(t)\dot{v}(t)+w\dot{m}(t) = -m(t)g$, lub po podzieleniu przez $m(t)$

$$\dot{v}(t) = -w\dot{m}(t)m(t)^{-1}-g. \tag{11}$$

Zakładając, że w chwili startu $t = 0$ jest $v(0) = 0$ (prędkość początkowa równa 0) oraz $m(0) = m_0$ (masa rakiety lub inaczej masa części użytecznej rakiety w chwili startu), i całkując równanie (11) w przedziale $\langle 0, t\rangle$ dostajemy

$$v(t) = w\log[m_0 m(t)^{-1}]-gt.$$

Z równania tego możemy się dowiedzieć np., jaka ilość paliwa musi zostać zużyta do danej chwili t, by przy: 1° zadanej prędkości wylotu gazów w oraz 2° danej masie $m(t)$, prędkość $v(t)$ była równa drugiej prędkości kosmicznej, tj. równała się 11,2 km/s. Istotnie z ostatniego równania (wobec $w > 0$, $-gt < 0$) dostajemy nierówność

$$e^{v(t)/w} \leqslant m_0 m(t)^{-1},$$

gdzie e jest podstawą logarytmów naturalnych, skąd (mnożąc przez $m(t)$ i potem odejmując $m(t)$):

$$m_0-m(t) \geqslant m(t)\,(e^{v(t)/w}-1).$$

Przyjmując $v(t) = 12$ km/s i $w = 1$ km/s otrzymujemy stąd

$$m_0-m(t) \geqslant 160000\ m(t).$$

Z ostatniej nierówności wynika, że jeżeli $m(t) = 1$ tona, to masa zużytego paliwa $m_0-m(t)$ musi wynosić co najmniej 160 000 ton.

Wynik tego rachunku tak został skomentowany przez Stefana Banacha w jego podręczniku „*Mechanika*", wydanym w roku 1938, a więc 41 lat temu: „Żeby więc odbyć podróż międzyplanetarną w wozie, mającym wraz z podróżnymi masę 1 tony, należałoby zabrać z sobą 160 000 ton materiałów pędnych, co jest oczywiście niemożliwe. Dowodzi to, że przy dzisiejszym stanie techniki podróż taka jest niewykonalna. Sprawa posunęłaby się naprzód, gdybyśmy mogli wydatnie zwiększyć w, tj. prędkość wypływu gazów, która dzisiaj, praktycznie biorąc, dochodzi do 2 km/sek".

Tyle cytatu z „*Mechaniki*" Banacha; natomiast żywiołowy rozwój techniki po II wojnie światowej sprawił, że w niespełna 30 lat po tej wypowiedzi Banacha rakiety kosmiczne zaczęły penetrować układ słoneczny, a człowiek po raz pierwszy postawił stopę na Księżycu. Ten fakt stał się możliwy m.in. dzięki temu, że znane było równanie, któremu poświęcony jest ten artykuł.

Na zakończenie należy podkreślić raz jeszcze, że równanie (8) obowiązuje w czasie działania silników odrzutowych, natomiast z chwilą ich wyłączenia ruchem rakiety zaczyna rządzić równanie postaci (5), gdyż wtedy $w(t)$ i $\dot{m}(t)$ stają się zerami. Jeśli więc z chwilą wyłączenia silników pojazd kosmiczny wejdzie np. na orbitę okołoziemską, to ruch po orbicie przebiega zgodnie z równaniem (5), w którym F oznacza teraz siłę mającą — według prawa powszechnej grawitacji — wartość proporcjonalną do iloczynu masy pojazdu i masy Ziemi oraz odwrotnie proporcjonalną do kwadratu odległości pojazdu od środka Ziemi.

Rozwiązanie zadania M 207

Przyjmując $x = u\pi$, $y = v\pi$ otrzymamy (ponieważ $\sin\pi\alpha = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy α jest liczbą całkowitą) równoważny układ

$$2u+3v = k$$
$$3u+v = l, \quad \text{gdzie } k \text{ i } l \text{ są dowolnymi}$$

liczbami całkowitymi. Wynika stąd, że liczby

$$3l-k = 3(3u+v)-(2u+3v) = 7u \text{ oraz}$$
$$3k-2l = 3(2u+3v)-2(3u+v) = 7v \text{ są}$$

całkowite, czyli u i v są ułamkami o mianowniku 7. Oznaczając ich liczniki odpowiednio przez m i n dochodzimy do układu kongruencji

$$2m+3n = 0 \pmod 7$$
$$3m+n = 0 \pmod 7$$

równoważnego układowi wyjściowemu. Ale $3(3m+n) = 9m+3n \equiv 2m+3n \pmod 7$, czyli pierwsza kongruencja wynika z drugiej. Wystarczy więc, aby $3m+n \equiv 0 \pmod 7$, czyli $n \equiv 4m \pmod 7$, i przyjmując za m dowolną liczbę całkowitą z przedziału $[0, 6]$ otrzymamy 7 serii rozwiązań:

m	n	x	y
0	0	k	l
1	4	$\left(k+\frac{1}{7}\right)$	$\left(l+\frac{4}{7}\right)$
2	1	$\left(k+\frac{2}{7}\right)$	$\left(l+\frac{1}{7}\right)$
3	5	$\left(k+\frac{3}{7}\right)$	$\left(l+\frac{5}{7}\right)$
4	2	$\left(k+\frac{4}{7}\right)$	$\left(l+\frac{2}{7}\right)$
5	6	$\left(k+\frac{5}{7}\right)$	$\left(l+\frac{6}{7}\right)$
6	3	$\left(k+\frac{6}{7}\right)$	$\left(l+\frac{3}{7}\right)$