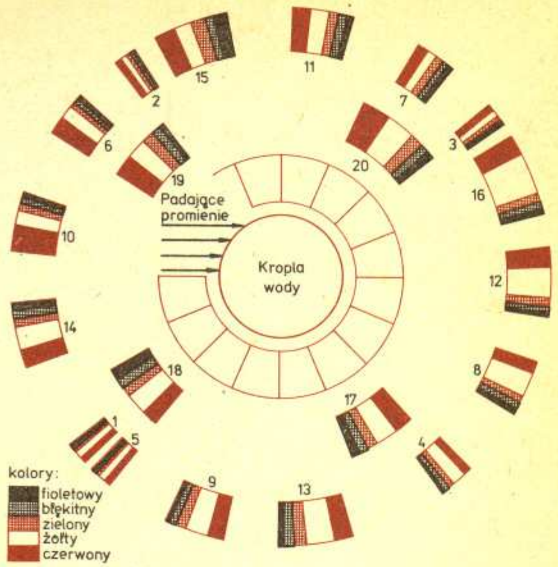
Dorota ZIELIŃSKA z Krakowa

Nawiązując do artykułu na temat tęczy z Delty 10/1978 proponuję obserwację tęcz wyższych rzędów. Będziemy je obserwować wokół kropli wody zawieszonej na końcu drutu. Do niedużego klocka przyklejamy poziomo kawałek niegrubego pręta, zaginając go na końcu pionowo w dół. Uprzednie pokrycie drutu czarnym woskiem nie jest konieczne, ale ułatwi obserwację zjawiska. Zmniejszy bowiem ilość światła odbitego, nie padającego wprost ze źródła. Poza tym kropla oczywiście przybierze bardziej kulisty kształt, będzie mniej przylegać do pręta. Przy pomocy rozpylacza z wodą na pionowym końcu drutu formujemy kroplę. (Jeżeli nie dysponujemy rozpylaczem, możemy ją też utworzyć maczając drut bezpośrednio w wodzie). Następnie całość wkładamy do ułożonego na boku otwartego tekturowego pudełka. Teraz w ścianie bocznej, mniej więcej na wysokości kropli, robimy niewielki otwór. Przez niego bowiem będziemy oświetlać kroplę. Zapewnimy sobie w ten sposób strumień światła o średnicy zbliżonej do kropli. Jako źródła światła możemy użyć rzutnika. Umieszczamy go tak, aby światło wchodzące przez otwór padało na całą kroplę.
Główną przyczyną uniemożliwiającą obserwację tęcz wyższych rzędów jest ich zbyt małe natężenie w stosunku do pozostałych promieni słonecznych. Także w naszym doświadczeniu promienie odbite będą utrudniać zauważenie zjawiska. Można je w dużym stopniu wyeliminować przez dodatkowe zasłanianie otworu kawałkiem kartonu. Znalezienie i zidentyfikowanie szukanej tęczy ułatwi koło na rysunku obok. Naniesione są na nim kąty, pod jakimi opuszczają kroplę po kolejnych odbiciach promienie tworzące odpowiednie tęcze. Warto przeprowadzić podobne doświadczenie używając innej cieczy. Należy pamiętać, że zwiększanie wymiarów kropli w każdym przypadku zwiększy wyrazistość zjawiska.



Czytelnicy proponują

Pan *Tadeusz BONCLER* z Warszawy przysłał list, w którym m.in. dowodzi następującej nierówności

$$(k-1)^{k/2}+k^{k/2} < (k+1)^{k/2} \text{ dla naturalnych } k > 4.$$

Przedstawiamy ten dowód po pewnych uproszczeniach. Wykażemy najpierw, że dla każdej liczby naturalnej $k > 4$ prawdziwa jest nierówność

$$(*) \qquad \sqrt{\left(1-\frac{1}{k}\right)^k}+1 < \sqrt{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}.$$

Oznaczmy prawą stronę tej (jeszcze nie udowodnionej) nierówności przez P_k, zaś lewą stronę przez L_k+1. Jak wiadomo, ciąg $\{P_k\}$ jest rosnący i zbieżny do liczby $\sqrt{e} = 1,6487\ldots$ Natomiast ciąg $\{L_k\} = \left\{\sqrt{\left(1-\frac{1}{k}\right)^k}\right\}$ jest też rosnący i zbieżny do $\frac{1}{\sqrt{e}} =$ $= 0,6065\ldots$ Lewa strona nierówności $(*)$ jest więc zawsze mniejsza od $1,6065\ldots$
Ponieważ $\{P_k\}$ jest ciągiem rosnącym, więc dla każdego $k > 9$ mamy $P_k > P_9$. Ale $P_9 = \sqrt{\left(1+\frac{1}{9}\right)^9} = \sqrt{\frac{10^9}{9^9}} = \frac{\sqrt{10}}{3}\cdot\frac{10^4}{9^4} =$

$$= \frac{10000\cdot\sqrt{10}}{3\cdot 6561} > \frac{31622}{19683} > 1,6066.$$

Nierówność $(*)$ jest więc spełniona dla wszystkich $k \geqslant 9$. Dla $k =$ $= 5, 6, 7, 8$ można ją sprawdzić bezpośrednio. Zauważmy, że $3^2+4^2 = 5^2$, zatem $(*)$ nie jest prawdą dla $k = 4$. Przez pomnożenie obu stron nierówności $(*)$ przez $k^{k/2}$ otrzymujemy nierówność

$$(k-1)^{k/2}+k^{k/2} < (k+1)^{k/2},$$

prawdziwą, jak poprzednia, dla $k > 4$.

Pan *Mariusz PISZCZEK* z Wieliczki proponuje następujący szybki sposób obliczania kwadratów liczb dwucyfrowych. Szukany kwadrat jest mianowicie sumą dwu odpowiednich liczb. Pierwszą z nich otrzymujemy przez napisanie obok siebie kwadratów cyfr liczby danej, druga zaś liczba jest podwojonym iloczynem tych cyfr. Liczbom jednocyfrowym należy jednak dopisywać na początku zero: 01, 02, ..., 09. Przy dodawaniu drugą liczbę podpisujemy w ten sposób, że przesuwamy ją o jedno miejsce w lewo.
Przykłady: $97^2 = 9409$:

$$\begin{array}{rcr}
9^2 = 81 & & 8149 \\
7^2 = 49 & & +126 \\
2\cdot 9\cdot 7 = 126 & & \overline{9409}
\end{array}$$

Od redakcji. Metodę tę opartą bezpośrednio na wzorze $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ można uogólnić tak, by nadawała się do obliczania kwadratów dowolnych liczb. Wyjaśnimy ją na przykładzie.
Zadanie. Obliczyć 987654^2.
Rozwiązanie.
1) zaczynając od lewej pomnóż każdą cyfrę przez następną, a wyniki zapisz jeden za drugim:

7256423020

2) każdą cyfrę pomnóż przez tę stojącą o dwa miejsca od niej:

63483524

3) i tak dalej... Wyniki podpisz jeden pod drugim w trójkąt:

	7256423020
	63483524
	544028
	4532
	36
dodaj	7950553060
jeszcze raz to samo	7950553060
kwadraty cyfr wyjściowej liczby .	816449362516
Suma	975460423716.

Wynik gotowy: $987654^2 = 975460423716$.

(wg. *Scripta Mathematica*, 1952)