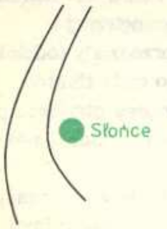
Pomiar krzywizny przestrzeni

Mgr Bożena MUCHOTRZEB

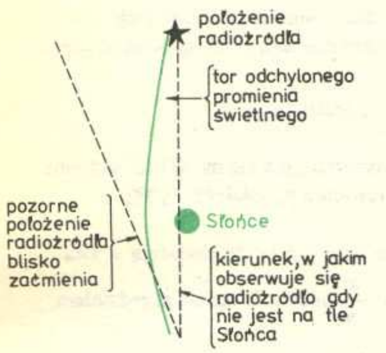
Na wierzchołkach trzech niemieckich szczytów: Brocken, Hohenhagen i Inselberg, odległych od siebie o kilkadziesiąt kilometrów, ustawiono przyrządy geodezyjne, zmierzono trzy kąty tak utworzonego trójkąta i dodano je. Po uwzględnieniu błędów pomiaru otrzymano wartość 180°. W taki to sposób w latach 1821–23 wielki matematyk Karol Fryderyk Gauss doświadczalnie wyznaczał geometrię przestrzeni. Już wtedy uważał, że matematyka posługując się ogólnymi prawami geometrii może proponować wiele różnych rozwiązań, a to, jaki wariant jest realizowany w danym miejscu w przestrzeni, zależy od lokalnych warunków fizycznych. Ogólna teoria względności sformułowana przez Alberta Einsteina zastąpiła intuicję Gaussa precyzyjnym rozumowaniem. Koniecznym okazało się wprowadzenie pojęcia czasoprzestrzeni, a równania Einsteina określiły związek geometrii czasoprzestrzeni z wypełniającą tę czasoprzestrzeń materią. Tor cząstki swobodnej, to znaczy nie podlegającej działaniu innych sił oprócz pola grawitacyjnego, wprowadzono jako wzorzec linii prostej, nazywanej też linią geodezyjną.



dewiacja geodezyjnych

W czasoprzestrzeni całkowicie pustej tak wprowadzona geometria odpowiada geometrii euklidesowej. Wniosek taki podpowiada nam mechanika Newtona: jeśli jako przykład weźmiemy dwie cząstki, poruszające się w pewnym momencie równolegle z jednakowymi prędkościami, to w pustej przestrzeni będą się poruszać ruchem jednostajnym, zawsze równolegle i w tej samej odległości od siebie (jeśli zaniedbać ich wzajemne oddziaływanie). Rozpoznajemy natychmiast w tym modelu dwie proste równoległe nigdzie nie przecinające się, znane z geometrii euklidesowej.

Spróbujmy jednak wypełnić czasoprzestrzeń częściowo materią. Wtedy nasze dwie cząstki, poruszające się początkowo, w dużej odległości od obszaru zajętego przez materię, równolegle do siebie, przy przechodzeniu przez rejon silnego niejednorodnego pola grawitacyjnego mogą zacząć się wzajemnie oddalać lub zbliżać. Posługując się intuicją z mechaniki newtonowskiej możemy powiedzieć, że cząstka przechodząca powiedzmy bliżej jakiejś dużej masy zostanie silniej przyciągana, tory obu cząstek zakrzywią się w różnym stopniu — a więc rozbiegną. Ponieważ jednak w ramach teorii Einsteina tory ich nadal traktujemy jako geodezyjne w czasoprzestrzeni, więc efekt interpretujemy zakrzywieniem samej czasoprzestrzeni, a geometria staje się nieeuklidesowa.



Wiemy już więc, jak mierzyć krzywiznę czasoprzestrzeni: wystarczy mieć dwie cząstki poruszające się początkowo dość blisko siebie i równolegle, z podobnymi prędkościami, i patrzeć, co się z nimi dzieje. Wielkość, która charakteryzuje tendencję takich cząstek do oddalania się od siebie lub zbliżania czyli dewiację geodezyjnych, nazywamy krzywizną (tensorem krzywizny) czasoprzestrzeni. Aby ją określić, nie wystarcza jedna liczba, gdyż zachowanie dwóch cząstek w pobliżu danego punktu czasoprzestrzeni zwykle będzie zależało od ich wzajemnego położenia, gdyż pole grawitacyjne nie musi być jednorodne. W najbardziej ogólnym przypadku konieczny jest układ aż 20 liczb. Wyznaczyć krzywiznę czasoprzestrzeni jest więc w zasadzie bardzo łatwo, gdyż nawet spadanie rzuconego w górę kamienia jest jej efektem, ale typowe zjawiska spotykane na Ziemi można wyjaśnić na gruncie teorii grawitacji Newtona, bez odwoływania się do einsteinowskiej interpretacji geometrycznej, ponieważ są to zjawiska dotyczące słabych pól i małych prędkości. Dopiero dla silnych pól i prędkości porównywalnych z prędkościami światła wynik pomiaru krzywizny czasoprzestrzeni może być naprawdę interesujący, głównie ze względu na możliwość testowania ogólnej teorii względności. Dlatego wykorzystywano w tym celu tory fotonów (prędkość światła!) przechodzących możliwie blisko tarczy słonecznej (wystarczająco silne pole grawitacyjne). Porównanie obserwowanej odległości kątowej na niebie źródła fotonów i źródła wzorcowego w przypadku bliskości Słońca oraz w przypadku znacznego oddalenia pozwala obserwować i mierzyć zjawisko dewiacji geodezyjnych.

Ugięcie promienia świetlnego przy przejściu w pobliżu tarczy słonecznej można w zasadzie przewidzieć i w ramach teorii newtonowskiej, jeśli traktować foton jako cząstkę materialną o prędkości c i energii $\frac{1}{2}mc^2$ (m jest dowolną masą, wielkość ugięcia od niej nie zależy). Wzór, wyprowadzony już w 1801 roku przez niemieckiego uczonego. J. Soldnera, podaje wartość

$\Delta\varphi = \frac{2MG}{Rc^2}$, gdzie R — promień Słońca, M — masa Słońca i G — stała grawitacji.

Takie traktowanie fotonu jest jednak błędne i dlatego wynik przewidywany przez ogólną teorię względności różni się o czynnik 2:

$$\Delta\varphi = \frac{4MG}{Rc^2}.$$

Czy jednak teoria względności ma rację, to powinno wyniknąć z obserwacji.

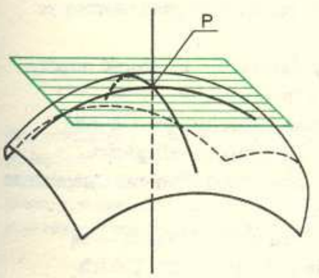
Najdokładniejszym z dotychczas wykonanych testów jest pomiar ugięcia mikrofal radiowych przechodzących w pobliżu tarczy Słońca, wykonany przez E. B. Fomalonta i R. A. Sramka

w obserwatorium w Green Bank (West Virginia, USA). Jako źródła mikrofal wykorzystano trzy radioźródła (oznaczone symbolami 0116+08, 0119+11 i 0111+02, określającymi ich położenie na niebie), które leżą prawie dokładnie na jednej prostej, a środkowe wiosną każdego roku jest zaćmiewane przez Słońce. Eksperyment wymagał niezwykle dużej dokładności, ponieważ przewidywana wartość odchylenia jest równa zaledwie 1",749. Pomiar położenia radioźródeł był dokonywany za pomocą interferometru o bazie 35 km. Dwa skrajne radioźródła służyły jako punkt odniesienia oraz, dzięki dokonywaniu wyłącznie pomiarów względnych, pozwalały usunąć zakłócenia związane z działaniem urządzeń elektronicznych, ruchami atmosfery ziemskiej oraz nieregularnościami ruchu obrotowego Ziemi. Duże trudności sprawiło usunięcie wpływu korony słonecznej na wielkość ugięcia mikrofal. W tym celu prowadzono obserwacje jednocześnie na dwóch częstotliwościach: 2695 MHz i 8085 MHz, ponieważ wielkość ugięcia pod wpływem korony zależy od długości fali, i to pozwalało na wprowadzenie odpowiedniej poprawki, równej 0",1 dla 2695 MHz. Zmieniające się niejednorodności (oscylacje) korony usuwano przez uśrednianie wyników w czasie, dzięki obserwowaniu każdego radioźródła przez 6 min. Pomiary wykonano w ciągu dwóch kolejnych wiosen: 1974 i 1975 roku. Wynik był niezwykle dokładny

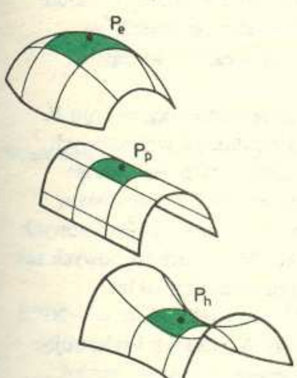
$$\Delta\varphi = 1'',761 \pm 0'',016.$$

Zgodny z przewidywaniami ogólnej teorii względności, stanowi jej potwierdzenie, a jednocześnie bardzo silne ograniczenie na inne, konkurencyjne teorie grawitacji, proponowane po Einsteinie.

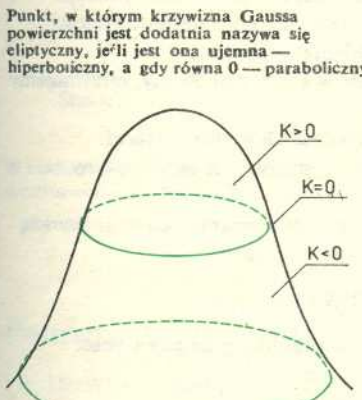
Przyjrzyjmy się powierzchni



Płaszczyzna styczna i prosta normalna do powierzchni



Punkt, w którym krzywizna Gaussa powierzchni jest dodatnia nazywa się eliptyczny, je'li jest ona ujemna — hiperboliczny, a gdy równa 0 — paraboliczny.



Punty eliptyczne, paraboliczne i hiperboliczne na powierzchni w kształcie dzwonu.

ale lokalnie. Oznacza to, że interesować nas będą obserwacje dotyczące tylko „najbliższej okolicy", czyli otoczenia wybranych (zresztą dowolnie) punktów. Weźmy więc pod uwagę kilka różnych powierzchni — np. powierzchnię szklanki, stołu, szkiełka od zegarka, kartki papieru, kapelusza czy beretu, globusa, albo jakiejś do niczego niepodobnej bryły ugniecionej z plasteliny. Poczynić należy tylko jedno ograniczenie — interesować nas będą wyłącznie powierzchnie bez kantów i rogów (możemy tam, gdzie są kanty i rogi, obserwować tę część powierzchni, która ich nie zawiera).

Łatwo ustalić, co to jest płaszczyzna styczna w obserwowanym punkcie — wystarczy przyłożyć płaską blaszkę dotykającą powierzchni w tym punkcie, lub wyobrazić sobie, że ją przyłożyliśmy tam, gdzie jest to trudne do zrobienia lub niemożliwe (np. „w dołku"). Prosta prostopadła do płaszczyzny stycznej i przechodząca przez punkt styczności nazywana jest normalną do powierzchni. Ustalmy też (dowolnie, ale jakoś), po której stronie płaszczyzny stycznej będzie „dodatnia" a po której „ujemna" strona powierzchni. W tym miejscu potrzebna jest owa lokalność — na wstędze Möbiusa ustalić się tego dla całej powierzchni nie da, ale lokalnie można zawsze. Wyposażeni w powyższe ustalenia teoretyczne przystępujemy do badań.

Przetnijmy (w wyobraźni choćby) powierzchnię wszystkimi płaszczyznami zawierającymi prostą normalną i zajmijmy się krzywiznami otrzymanych w przecięciu krzywych. A co to jest krzywizna? — odwrotność promienia okręgu najlepiej pasującego do krzywej w obserwowanym punkcie wzięta z takim znakiem, jaki ma ta strona krzywej, po której leży środek tego okręgu. Co się okaże (albo co się już okazało)? Otóż jeśli nie wszystkie krzywizny są równe, to krzywe mające największą i najmniejszą krzywiznę leżą w płaszczyznach prostopadłych. Odpowiedź na pytanie, dlaczego tak jest, nie jest łatwa do uzyskania, ale warto spróbować.

Jeżeli pomnożymy największą i najmniejszą z otrzymanych krzywizn, otrzymamy liczbę zwaną krzywizną Gaussa. Można spróbować sprawdzić doświadczalnie, że dla danego punktu jest ona niezależna od wyginania powierzchni (beret, kartka papieru), o ile tylko owej powierzchni nie rozciągamy (ale w podanych przykładach raczej to nie grozi). Udowodnił to Gauss i można o tym przeczytać w podręcznikach geometrii różniczkowej powierzchni — dowód jest bardzo trudny.

Ale nie trzeba tego dowodu znać, żeby korzystać z twierdzenia. Możemy łatwo wykazać na jego podstawie, że

— każda mapa zmienia odległości nieproporcjonalnie (bo krzywizna sfery o promieniu R wynosi $\frac{1}{R^2}$, a kartki papieru 0 — musiało się coś rozciągnąć),

— rynnę czy rurkę z cienkiej blachy można zgiąć tylko łamiąc blachę (bo gdyby nie, to trzeba by ją rozciągnąć, a na to jesteśmy za słabi).

Można też wykonać demonstrację: cienką kartkę z zeszytu zwijamy w rurkę (można nawet nie sklejać), stawiamy pionowo na stole, a na wierzchu ustawiamy odważnik 1/2 kg. Dopóki kartka się nie rozwinie, będzie utrzymywała ten ciężar. Czemu? bo krzywizna kartki i przed zwinięciem i po jest 0, aby się więc mogła ugiąć, należałoby rozciągnąć papier, a na to 1/2 kg nie wystarczy.

dr Marek KORDOS