# Podstawowe prawa elektrodynamiki

*Doc. dr Andrzej SZYMACHA*

W programie szkolnym bardzo dużo uwagi poświęca się nauce o elektryczności i magnetyzmie. Jest to zrozumiałe. Bez znajomości praw elektromagnetyzmu nie może się obejść nie tylko badacz czy inżynier, ale wręcz żaden człowiek otoczony współczesną cywilizacją. Tzw. elektrodynamika klasyczna (to znaczy nie rozpatrująca zjawisk kwantowych) jest dyscypliną fizyki teoretycznej ukształtowaną w niemal ostatecznej postaci już ponad 100 lat temu. Mimo ogromnej wagi elektrodynamiki oraz jej „klasyczności", w szkole średniej nie wykłada się w pełni jej wszystkich fundamentalnych praw w sformułowaniu ilościowym. Panuje dość powszechny pogląd, że nie da się tego zrobić bez nadmiernie — ponad możliwości programu — rozbudowanej matematyki. Oczywiście, bez zaawansowanej matematyki nie da się korzystać z praw elektrodynamiki w większości jej zastosowań do konkretnych problemów, ale samo sformułowanie podstawowych praw i ich zrozumienie jest w pełni możliwe przy użyciu niezbyt skomplikowanych pojęć matematycznych.

Obraz świata materialnego wytworzony przez elektrodynamikę klasyczną jest taki, że przestrzeń wypełniona jest poruszającymi się cząstkami (z których przynajmniej pewne są obdarzone cechą zwaną ładunkiem elektrycznym) oraz polem elektromagnetycznym. Abstrahując od wszelkich subtelności filozoficznych (oraz od efektów kwantowych) powiemy, że w każdym punkcie przestrzeni, w każdej chwili czasu określone jest pole elektromagnetyczne, jeśli wyznaczymy bądź teoretecznie, bądź drogą pomiarów, wartości dwóch wektorów — pola elektrycznego $\boldsymbol{E}$ i tzw. indukcji magnetycznej $\boldsymbol{B}$. Prawa elektrodynamiki (wraz z prawami mechaniki) powinny określić, jak zależy pole od rozmieszczenia i stanu ruchu cząstek naładowanych, oraz jak wartość pola wpływa na ruch cząstek znajdujących się w tym polu. Druga część zadania jest stosunkowo prosta. Z mechaniki wiemy, że pochodna pędu cząstki względem czasu równa się sile działającej na tę cząstkę. Należy więc określić postać siły działającej na cząstkę o ładunku $q$ w zależności od pól $\boldsymbol{E}$ i $\boldsymbol{B}$ w punkcie przestrzeni, w którym w danej chwili znajduje się cząstka. Ostateczny wzór na siłę w polu elektromagnetycznym został podany przez Lorentza w postaci

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B},$$

gdzie $q$ jest ładunkiem, a $\boldsymbol{v}$ prędkością cząstki. Wzór ten może służyć do pomiaru pól $\boldsymbol{E}$ i $\boldsymbol{B}$ w danym punkcie. Wystarczy zmierzyć siłę działającą na spoczywający ładunek, by po podzieleniu przez $q$ mieć wartość pola elektrycznego. Kierunek $\boldsymbol{E}$ pokrywa się z kierunkiem siły, wystarczy więc jeden pomiar. Następnie mierzymy dodatkową siłę pojawiającą się po nadaniu cząstce prędkości $\boldsymbol{v}$. W celu wyznaczenia $\boldsymbol{B}$ potrzeba znaleźć siłę przy co najmniej dwóch prędkościach o różnych kierunkach. Ponieważ siła pochodząca od pola magnetycznego jest prostopadła do $\boldsymbol{B}$, to po pierwszym pomiarze siły, wiemy, że $\boldsymbol{B}$ musi leżeć w płaszczyźnie prostopadłej do wyznaczonej siły. Przy innym kierunku prędkości znajdujemy nową siłę i nową płaszczyznę do niej prostopadłą. Krawędź przecięcia tych płaszczyzn wyznacza kierunek $\boldsymbol{B}$.

Ponieważ w określeniu $\boldsymbol{E}$ i $\boldsymbol{B}$ występuje pojęcie spoczynku i prędkości, które mają sens tylko wtedy, gdy wskażemy jakiś inercjalny układ odniesienia, to jasne jest, że same wektory $\boldsymbol{E}$ i $\boldsymbol{B}$ mają sens też tylko po ustaleniu układu odniesienia. W tej samej sytuacji fizycznej, względem innego układu odniesienia, wartości $\boldsymbol{E}'$ i $\boldsymbol{B}'$ są na ogół różne od $\boldsymbol{E}$ i $\boldsymbol{B}$.

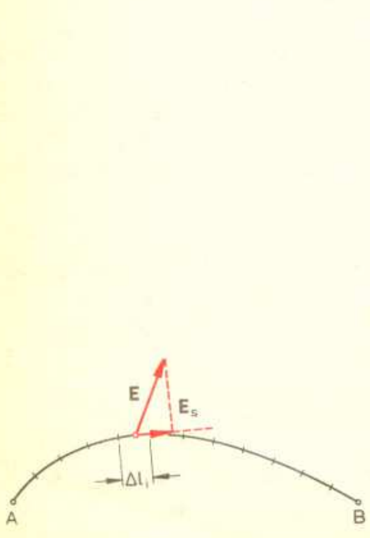
Wzoru na siłę Lorentza nie wolno oczywiście traktować wyłącznie jako definicji pól $\boldsymbol{E}$ i $\boldsymbol{B}$. Np. to, że siła magnetyczna w danej chwili, w danym punkcie przestrzeni jest wprost proporcjonalna do wartości prędkości, jest prawem przyrody, a nie konsekwencją definicji. Natomiast współczynniki liczbowe w tym wzorze zależą od wyboru jednostek. Podany wzór obowiązuje w układzie SI.

Pozostaje teraz określić, jak pola $\boldsymbol{E}$ i $\boldsymbol{B}$ zależą od położeń i prędkości ładunków będących źródłami tych pól. Ze względów dydaktycznych, a także wzorując się na rozwoju historycznym elektrodynamiki zadanie to rozwiązuje się w trzech etapach: 1. pole elektryczne wytworzone przez spoczywające ładunki, 2. pole magnetyczne wytworzone przez stacjonarne (to znaczy stałe w czasie) prądy i wreszcie 3. w najogólniejszym przypadku, kiedy wszystko jest zmienne w czasie.

Postać pola $\boldsymbol{E}$ wytworzonego przez spoczywające ładunki ustala znane prawo Coulomba wraz z tzw. zasadą superpozycji mówiącą, że pole wytworzone przez wiele ładunków punktowych jest wektorową sumą pól, jakie wytworzyłyby w danym punkcie każdy z ładunków. Jednakże sformułowanie podstawowego prawa elektrostatyki w postaci prawa Coulomba

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

nie jest jedynym możliwym. Do uogólnień na przypadki pola zmiennego w czasie oraz jako wzorzec służący do sformułowania podstawowego prawa magnetyzmu o wiele przydatniejsza jest inna postać tego samego prawa. Po to by ją podać, musimy posłużyć się dwoma ważnymi pojęciami krążenia (cyrkulacji) i strumienia. Do pojęcia krążenia po pewnej zamkniętej krzywej najłatwiej dojść rozpatrując pracę pola elektrycznego. Ponieważ wzdłuż dowolnej krzywej pole $\boldsymbol{E}$ jest na ogół coraz to inne, i coraz inny kąt tworzy z krzywą, musimy w celu obliczenia pracy podzielić rozpatrywaną krzywą na wiele (w granicy nieskończenie wiele) fragmentów. Przy odpowiednio drobnym podziale, pracę na każdym z odcinków możemy obliczyć jako iloczyn długości tego odcinka przez składową styczną siły $\Delta l_i = \Delta l_i \cdot qE_S$ (na $i$-tym odcinku), a pracę całkowitą jako sumę tych prac $L_{AB} = q \sum_{A}^{B} \cdot \Delta l_i \cdot E_S(i)$.



Interesująca jest wartość tej pracy przypadająca na jednostkowy ładunek

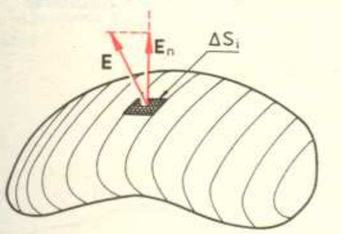
$$\frac{L_{AB}}{q} = \sum_{A}^{B} \Delta l_i \cdot E_S(i).$$

Korzystając z prawa Coulomba można obliczyć tę wartość dla pola wytworzonego przez ładunek $Q$, a w szczególności wykazać, że jeśli punkty $A$ i $B$ się pokrywają (krzywa jest zamknięta), to całkowita praca wynosi zero. Ze względu na zasadę superpozycji jest to słuszne i dla pola będącego sumą pól od dowolnej liczby ładunków punktowych.

$$0 = \sum_{\substack{\text{wzdłuż} \\ \text{zamkniętej} \\ \text{krzywej}}} \Delta l_i \cdot E_S(i).$$

Wartość powyższej sumy dla dowolnego pola nazywa się właśnie krążeniem tego pola wzdłuż danej zamkniętej krzywej. Dla pola elektrostatycznego

| |
|---|
| Krążenie pola $E$ $= 0$ <br> (po dowolnej krzywej zamkniętej) |




Pojęcie strumienia pola określa się dla dowolnej powierzchni rozpiętej na pewnym konturze. Powierzchnię dzielimy na wiele małych fragmentów (w przybliżeniu płaskich) i określamy strumień dla takiego fragmentu jako iloczyn składowej pola w kierunku prostopadłym do tego fragmentu, $E_n$, przez pole powierzchni fragmentu $\Delta S_i$.

Strumień całkowity $\qquad \Phi = \sum_i \Delta S_i \cdot E_n(i).$

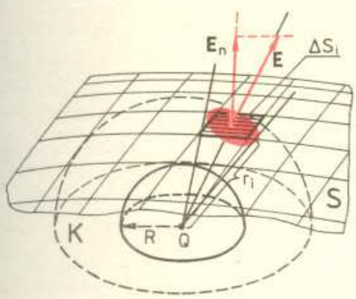
Łatwo obliczyć taki strumień dla pola elektrycznego ładunku punktowego przez powierzchnię kuli o środku pokrywającym się z ładunkiem. W tym przypadku $E_n = E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$, gdzie $R$ — stały promień kuli.

$$\Phi = \sum_i \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \cdot \Delta S_i = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \sum_i \Delta S_i.$$

Ale $\sum_i \Delta S_i = 4\pi R^2$ jest całkowitą powierzchnią kuli. Zatem

$$\Phi(\text{kuli}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} 4\pi R^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

Można wykazać, że wynik ten słuszny jest nie tylko dla kuli, ale dla dowolnej powierzchni otaczającej ładunek $Q$, niezależnie od wielkości i kształtu powierzchni.




Rozważmy ładunek $Q$, koncentryczną z nim kulę $K$ i dowolną powierzchnię $S$. Podzielmy $S$ na fragmenty i poprowadźmy stożek odpowiadający danemu fragmentowi $\Delta S_i$. Oznaczmy przez $\alpha_i$ kąt między kierunkiem $E$ a prostopadłą do fragmentu $\Delta S_i$. I wreszcie narysujmy rzut płatka $\Delta S_i$ na płaszczyznę prostopadłą do $E$. Możemy sobie wyobrażać, że rzut ten o polu $\Delta S_i \cdot \cos\alpha_i$ leży na powierzchni pewnej kuli o promieniu $r_i$. Stożek nasz na powierzchni kuli o promieniu $R$ odcina pewien płatek $\Delta s_i$, przy czym zachodzi

$$\frac{\Delta S_i \cdot \cos\alpha_i}{\Delta s_i} = \frac{r_i^2}{R^2} \Rightarrow \Delta S_i \cos\alpha_i = \frac{\Delta s_i}{R^2} r_i^2.$$

Strumień pola przez $\Delta S_i$ wynosi

$$\Delta\Phi_i = \Delta S_i \cdot E_n(i) = \Delta S_i \cdot E(r_i)\cos\alpha_i = E(r_i) \cdot \frac{\Delta s_i}{R^2} r_i^2.$$

Z prawa Coulomba $\qquad E(r_i) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2}, \qquad$ zatem

$$\Delta\Phi_i = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2} \frac{\Delta s_i}{R^2} r_i^2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\Delta s_i}{R^2}.$$

Strumień ten jest identyczny ze strumieniem pola przez fragment $\Delta s_i$ kuli o promieniu $R$. Zatem po zsumowaniu istotnie dostajemy

$$\Phi_{\text{całkowite}} \ (\text{przez } S) = \sum_i \Delta\Phi_i = \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

Istotną rolę w tym wyprowadzeniu odgrywa zależność pola $E$ od odwrotności kwadratu długości. Mówiąc poglądowo, wzrost powierzchni fragmentu na $S$ kompensowany jest zmniejszeniem wartości pola o ten sam czynnik. Podobnie pochylenie fragmentu $\Delta S_i$ w stosunku do $R$ zwiększa jego powierzchnię przy danym kącie bryłowym, ale tyleż razy zmniejsza składową normalną $E$. W efekcie iloczyn powierzchni i składowej normalnej pola nie ulega zmianie przy ustalonym wąskim stożku (kącie bryłowym). W podobny sposób wykazuje się, że strumień przez powierzchnię leżącą całkowicie na zewnątrz ładunku wynosi 0. Dzięki zasadzie superpozycji wynik słuszny jest też dla wielu ładunków

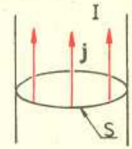
$$\Phi\begin{pmatrix}\text{przez dowolną zam-}\\\text{kniętą powierzchnię}\end{pmatrix} = \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\begin{matrix}\text{Suma ładunków obejmowanych}\\\text{przez tę powierzchnię}\end{matrix}$$

$$\boxed{\Phi = \frac{1}{\varepsilon_0}Q_{\text{całkowita}}}$$

Dwa podane prawa ujęte w ramkę są równoważne prawu Coulomba i zasadzie superpozycji.

W celu sformułowania praw magnetyzmu trzeba wprowadzić gęstość prądu. Jeśli prąd $I$ płynie „równomiernie" wzdłuż przewodu o przekroju $S$, to wektorem gęstości prądu nazywamy

$$j = \frac{I}{S},$$



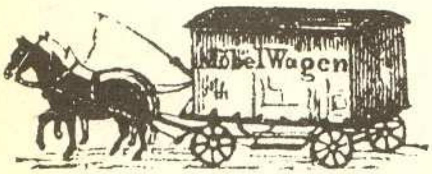

skąd

$$I = jS.$$

Jeśli rozkład jest nierównomierny, to gęstość prądu określamy dla małego fragmentu przewodu tak, by ładunek przepływający na sekundę przez ten fragment wynosił $j_n \Delta S_i$. W rezultacie całkowite natężenie prądu płynącego przez duży płat wynosi

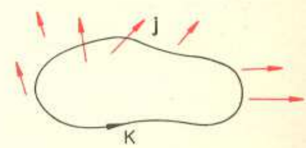
$$I = \text{Strumień } j \quad \text{(przez ten płat)}$$

A oto podstawowe prawa magnetyzmu



$$\boxed{\begin{matrix}\text{Strumień } B\\\text{(przez dowolną zamkniętą powierzchnię)}\end{matrix} = 0}$$

$$\boxed{\begin{matrix}\text{Krążenie } B\\\text{(wzdłuż konturu } K)\end{matrix} = \mu_0 \times \begin{matrix}\text{Strumień } j\\\text{(przez płat rozpięty na } K)\end{matrix}}$$




Pierwsze z powyższych praw nazywa się często prawem niewystępowania „ładunków" magnetycznych, drugie nazywa się prawem Ampere'a. Podstawą tych praw są oczywiście badania eksperymentalne. Analogiczne prawa elektrostatyki robią wrażenie udowodnionych, a to dlatego, że istnieje inne równoważne, wcześniej odkryte sformułowanie Coulomba, wzięte wprost z doświadczenia. Nie zmienia to jednak istoty rzeczy.

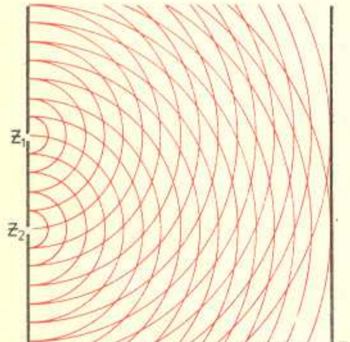
Cztery podane w ramkach prawa są podsumowaniem badań doświadczalnych dotyczących niezależnych od czasu pól elektrycznych i magnetycznych.
Polami zależnymi od czasu zajmiemy się w następnym artykule.

# Laboratorium w domu

## Do czego mogą służyć żyletki, czyli rzecz o interferencji


*Mgr Andrzej GOŁĘBIEWSKI*


### NIECO TEORII




Rys. 1

Światło ma naturę falową. Takie kategoryczne stwierdzenie musi wywołać odruch niewiary w każdym wnikliwym umyśle.
Bo jakie są dowody?
Żeby rozwiać Wasze wątpliwości, proponuję powtórzyć doświadczenie, które w 1807 roku opisał Tomasz Young. Wykazał on wówczas, że światło wywołuje takie same efekty, jak fale mechaniczne obserwowane na przykład na wodzie. Chodzi mianowicie o zjawisko interferencji, której mechanizm krótko przypomnę.
Jeżeli dwa ciągi fal pochodzące z dwóch różnych źródeł punktowych $Z_1$ i $Z_2$ na rys. 1 spotykają się, to w pewnych miejscach następuje wzmocnienie a w innych wygaszenie ich amplitud. Miejsca