

Dr Marek CIEPLAK



1. W poprzednim artykule (Delta 5/1979) zorientowaliśmy się, z jakim aparatem pojęciowym zabiera się fizyk-statystyk do kontemplowania wody w stawie. Dumać również można nad ruchem kawałków liści naparzonej herbaty. Działalność taką prowadził Einstein, co zaowocowało w postaci statystycznej teorii ruchów Browna, sformułowanej niezależnie także przez Smoluchowskiego.

2. Statystyczną analizę układów wielu cząstek dobrze jest rozpocząć od badania układów najprostszyc, a więc takich, dla których

$$(1) \quad E_t = \sum_{\alpha=1}^N \varepsilon_{(\alpha)}.$$

Przypomnijmy, że rozpatrujemy wszelkie sytuacje, jakie mogą być realizowane w pewnym dużym podukładzie układu makroskopowego. Jeśli w podukładzie jest akurat N cząstek, a α -ta cząstka ma jakąś energię $\varepsilon_{(\alpha)}$, to całkowita energia podukładu równa się w układach prostych sumie E_t . Jeżeli

$$(2) \quad \varepsilon_{(\alpha)} = \frac{p_{(\alpha)}^2}{2m},$$

gdzie $p_{(\alpha)}$ oznacza pęd α -tej cząstki, a m jej masę, to wzór (1) definiuje model gazu doskonałego. Słowo „doskonały” w istocie rzeczy zaćmiewa ułomność modelu, polegającą na zaniedbaniu oddziaływań (zderzeń) cząstek ze swymi partnerami. W wypadku gazów takich, jak hel, tlen, wodór, para rtęci, zaniedbanie energii oddziaływań w porównaniu ze średnią energią kinetyczną cząstek jest bardzo dobrym przybliżeniem, gdy średnia gęstość cząstek w podukładzie jest niewielka, a temperatura dostatecznie wysoka.

3. Okazuje się, że pojęcie gazu doskonałego można uogólnić na inne, niż gazy zwykłe, układy fizyczne. Ważnym przykładem jest układ elektronów przewodnictwa. Wiemy, że elektrony w metalu można podzielić na dwie grupy. Pierwsza z nich złożona jest z elektronów zewnętrznych powłok atomów, tworzących metal. Elektrony z tej grupy noszą nazwę elektronów przewodnictwa, gdyż mogą się one przemieszczać prawie swobodnie i dzięki temu przewodzić prąd. Na drugą zaś grupę składają się elektrony silnie związane z jądrami atomów. Elektrony przewodnictwa poruszają się zatem w polu dodatnio naładowanych jonów, ustawionych periodycznie w sieci krystalicznej. Średnia odległość między dwoma elektronami przewodnictwa jest rzędu ułamka nanometra, toteż energia ich wzajemnego oddziaływania jest porównywalna z ich energią kinetyczną. Pogląd, iż układ elektronów przewodnictwa można uważać za gaz doskonały, wydaje się więc na pierwszy rzut oka zwariowany. W rzeczywistości jest on słuszny. Otóż elektrony przewodnictwa oddziałują ze sobą tak silnie, że w rezultacie pojedynczy elektron porusza się w wypadkowym polu elektrycznym wytwarzanym przez wszystkie pozostałe elektrony. Pole to jest w dodatku silnie kompensowane przez pole dodatnich jonów sieci. Każdy z elektronów zachowuje się więc jak cząstka prawie swobodna. Nie jest to jednak „prawdziwa” cząstka, choć działa jak ona. Za Landauem fizyk używa tu nazwy „quasicząstka”. Z uwagi na periodyczność pola elektrycznego sieci owa quasicząstka ma też inną masę niż elektron swobodny. W metalach masy te są jednak tego samego rzędu, toteż analiza gazu doskonałego zwykłych elektronów prowadzi do zrozumienia wielu właściwości metali.

4. Podzielmy w myśli obszar zajmowany przez gaz doskonały na prostopadłościany o krawędziach L_x, L_y, L_z . Niech L_x, L_y, L_z będą duże w porównaniu ze średnią odległością między cząstkami. Zgodnie z mechaniką kwantową każdej cząstce można przyporządkować falę, czy bardziej fachowo: funkcję falową, której kwadrat wartości bezwzględnej określa gęstość prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w punkcie (x, y, z) . Funkcja falowa dla cząstki z pędem (p_x, p_y, p_z) okazuje się być kombinacją wyrazów proporcjonalnych do cosinusa i sinusa liczby $\frac{2\pi}{h}(p_x x + p_y y + p_z z)$, gdzie h jest stałą Plancka, równą $6,6 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$. Skoro żaden z prostopadłościanów nie jest wyróżniony, nałożmy na funkcję falową warunek powtarzania się od prostopadłościanu do prostopadłościanu, co odpowiada zamianie x na $x + L_x$ itd. Widzimy, że wartości pędu, które cząstka może przyjmować, nie są dowolne. Muszą one wynosić

$$(3) \quad p_x = \frac{h}{L_x} m_x, \quad p_y = \frac{h}{L_y} m_y, \quad p_z = \frac{h}{L_z} m_z,$$

gdzie m_x, m_y, m_z są dowolnymi liczbami całkowitymi. Mówimy, że pęd, a w związku z tym i energia, są skwantowane. Dwie sąsiadujące wartości p_x różnią się o h/L_x . Stosunek ten jest niezwykle mały z uwagi na znikomą wartość stałej Plancka, którą jeszcze dzielimy przez sporą długość L_x . Pęd przyjmuje więc wartości ze zbioru praktycznie ciągłego. Pisząc równanie Newtona nie kłopotujemy się zatem kwantowaniem pędu. Jednak w naszym wypadku własność skwantowania wykorzystamy do numerowania energii cząstki.



5. Pęd nie jest jedyną wielkością, która charakteryzuje stan cząstki. Wiele cząstek ma własny niezerowy wektor momentu pędu, zwany spinem, i proporcjonalny do niego własny moment magnetyczny. Takie cząstki zachowują się zatem jak wirujący bąk i jednocześnie jak pętelka z prądem. Zgodnie z mechaniką kwantową spin o wartości s może ustawiać się względem dowolnie wybranej osi tylko na $2s+1$ sposobów, które nazywamy stanami spinowymi cząstki. Np. cząstki o spinie $s = 1/2$, jak elektron, neutron, proton, atomy izotopu ^3He helu, mogą być tylko w dwóch stanach spinowych: „do góry” i „do dołu”. Pod nieobecność pola magnetycznego ustawienie spinu nie ma wpływu na energię cząstki.

6. Cząstki o spinie połówkowym ($s = 1/2, 3/2, 5/2$ itd.) nazywa się fermionami. Okazuje się, że fermiony obowiązuje reguła Pauliego: w danym stanie jednocząstkowym może znajdować się co najwyżej jedna cząstka. W naszym wypadku l -ty stan jednocząstkowy określony jest przez podanie wartości pędu cząstki, tj. przez wybór liczb m_x, m_y, m_z , i numer stanu spinowego. Jeśli przez n_l oznaczyć liczbę cząstek obsadzających l -ty stan, to regułę Pauliego można zapisać w następujący sposób: .

$$(4) \quad n_l = 0 \text{ lub } 1.$$

Bozonów, czyli cząstek o spinie całkowitym ($s = 0, 1, 2$ itd.) reguła Pauliego nie obowiązuje i wówczas

$$(5) \quad n_l = 0, \text{ lub } 1, \text{ lub } 2, \text{ lub } 3, \text{ lub } 4, \dots$$

Bozonami o zerowym spinie są np. atomy gazów szlachetnych, a o spinie 1 — cząsteczki wodoru ^1H .

7. Przypuśćmy, że bozonowy lub fermionowy gaz doskonały wewnątrz prostopadłościanu jest w stanie o N cząstkach i o całkowitej energii E_l . Wielkości N i E_l dogodnie jest zapisać za pomocą liczb obsadzeń n_l :

$$(6) \quad N = \sum_l n_l,$$

$$(7) \quad E_l = \sum_l \varepsilon_l n_l,$$

gdzie ε_l oznacza energię, odpowiadającą l -temu stanowi pojedynczej cząstki, a $\varepsilon_l n_l$ — wypadkową energię wszystkich cząstek, którym zdarzyło się być w l -tym stanie. Widzimy, że zbiór liczb obsadzeń $\{n_l\}$ wyznacza stan układu. Dla zadanego N istnieje wiele zbiorów $\{n_l\}$, spełniających warunek (6), a stąd — wiele dopuszczalnych E_l . Średnie wartości $\langle N \rangle$ i $\langle E \rangle$ otrzymuje się, zastępując n_l średnimi liczbami obsadzeń $\langle n_l \rangle$.

8. Wykażemy teraz, że jeśli układ ma temperaturę T i potencjał chemiczny μ , to

$$(8) \quad \langle n_l \rangle = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_l - \mu}{k_B T}} \pm 1}.$$

Górny znak dotyczy fermionów, a dolny — bozonów, przy czym μ jest funkcją temperatury. Posłużymy się rozkładem wielkim kanonicznym, zdefiniowanym wzorem

$$(9) \quad P_{N, E_l} = \frac{e^{(\mu N - E_l)/k_B T}}{\Xi}.$$

Obliczmy najpierw stałą Ξ , normującą rozkład do jedności. Otóż

$$(10) \quad \Xi = \sum_{N=0}^{\infty} e^{\frac{\mu N}{k_B T}} \sum_l e^{\frac{-E_l}{k_B T}} = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\{n_l\}} e^{\frac{\mu}{k_B T} \sum_l n_l} e^{-\frac{1}{k_B T} \sum_l \varepsilon_l n_l}$$

Symbol \sum' oznacza sumowanie po takich zbiorach liczb obsadzeń, które odpowiadają całkowitej liczbie cząstek równej N . Zsumowanie po wszystkich N pozwala pominąć warunek na $\{n_l\}$. Stąd

$$(11) \quad \Xi = \sum_{\{n_l\}} e^{\frac{1}{k_B T} \sum_l (\mu - \varepsilon_l) n_l} = \prod_l \sum_{n_l} e^{\frac{1}{k_B T} (\mu - \varepsilon_l) n_l}$$

Podstawmy (11) do (9) i zapiszmy występujące tam N i E_l zgodnie z (6) i (7). Stwierdzamy, że prawdopodobieństwo wystąpienia stanu o N cząstkach i o energii E_l jest następującym iloczynem:

$$(12) \quad P_{N, E_l} = \prod_l P_l,$$

gdzie

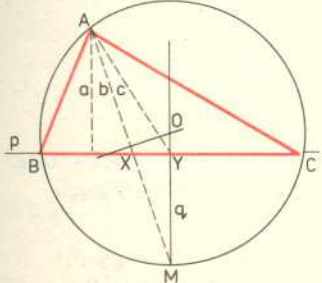
$$(13) \quad P_l = \frac{e^{\frac{1}{k_B T} (\mu - \varepsilon_l) n_l}}{\sum_{n_l} e^{\frac{1}{k_B T} (\mu - \varepsilon_l) n_l}}.$$

Czynnik P_l ma zatem interpretację prawdopodobieństwa realizacji l -tego stanu jednocząstkowego. Wnioskujemy stąd, że średnia liczba cząstek w tym stanie wynosi

$$(14) \quad \langle n_l \rangle = \sum_{n_l} n_l P_l.$$

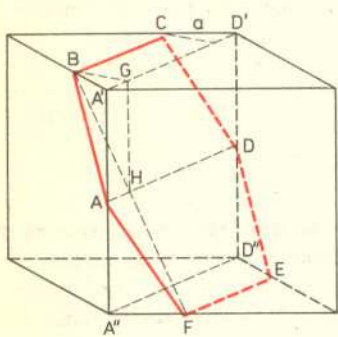


Rozwiązanie zadania M 200
Wybieramy prostą p i znajdujemy na niej punkty X i Y odległe odpowiednio o d i m od punktu A położonego w odległości h od tej prostej. Ponadto punkty te winny leżeć po tej samej stronie rzutu prostokątnego A na p . Niech M będzie punktem przecięcia prostej AX z prostą q prostopadłą do p i przechodzącą przez Y . Z zadania M 199 wynika, że punkt M leży na okręgu opisanym na szukanym trójkącie ABC . Prowadząc symetralną odcinka AM znajdujemy w jej przecięciu z prostą q punkt O , będący środkiem wspomnianego okręgu. Wierzchołki B i C trójkąta znajdujemy w przecięciu okręgu o środku w O i promieniu OA z prostą p .





Rozwiązanie zadania M 201
 Rozpatrzmy płaszczyznę $ABCDEF$ przechodzącą przez środki przeciwległych krawędzi $A'A''$ i $D'D''$ sześcianu. Niech $A'B = D'C = A''F = D''E = a$. Mamy $BC = EF = \sqrt{2}(1-a)$. Niech G i H będą rzutami prostokątnymi punktu B na proste $A'D'$ i AD . Z trójkąta prostokątnego BCH wyznaczmy $CH = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}$ i wobec tego $BE = 2 \cdot CH = \sqrt{1+2a^2}$. W sześcioąt $ABCDEF$ możemy więc wpisać kwadrat o boku $b = \min(BC, CH) = \min(2(1-a), \sqrt{1+2a^2})$. Funkcja $f(a) = \sqrt{2}(1-a)$ jest funkcją malejącą parametru a ; zaś $g(a) = \sqrt{1+2a^2}$ rosnącą. Wynika stąd, że wartość b będzie największa, gdy $\sqrt{1+2a^2} = \sqrt{2}(1-a)$, czyli gdy $a = \frac{1}{4}$. Długość boku kwadratu wyniesie wówczas $\frac{3}{4}\sqrt{2} \approx 1,0607$. Można udowodnić, że jest to największy kwadrat mieszczący się w naszym sześcianie.



Średnia liczba wszystkich cząstek $\langle N \rangle$ równa jest $\sum_l \langle n_l \rangle$, a średnia energia $\langle E \rangle = \sum_l \varepsilon_l \langle n_l \rangle$. W wypadku fermionów n_l spełnia warunek (4), toteż

$$(15) \quad \langle n_l \rangle = \frac{0 \cdot e^{\frac{1}{k_B T}(\mu - \varepsilon_l) \cdot 0} + 1 \cdot e^{\frac{1}{k_B T}(\mu - \varepsilon_l) \cdot 1}}{1 + e^{\frac{1}{k_B T}(\mu - \varepsilon_l)}} = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_l - \mu}{k_B T}} + 1}$$

W wypadku bozonów

$$(16) \quad \langle n_l \rangle = \frac{\sum_{n_l=0}^{\infty} n_l e^{\frac{1}{k_B T}(\mu - \varepsilon_l)n_l}}{\sum_{n_l=0}^{\infty} e^{\frac{1}{k_B T}(\mu - \varepsilon_l)n_l}} = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_l - \mu}{k_B T}} - 1}$$

gdyż mianownik w (16) jest sumą postępu geometrycznego $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ o ilorazie $q = e^{\frac{\mu - \varepsilon_l}{k_B T}}$ i pierwszym

wyrazie równym 1, licznik zaś jest pochodną sumy postępu względem q . Szereg ten jest zbieżny, jeśli $q < 1$, tzn. $\mu - \varepsilon_l < 0$. Skoro minimalną wartością energii kinetycznej jest zero, potencjał chemiczny doskonałego gazu bozonów powinien być ujemny. [Przekonamy się jednak, że dla temperatur bliskich zera bezwzględnej μ musi zniknąć. W wypadku stanów, odpowiadających energii $\varepsilon_l = 0$, wzór (16) będzie wymagał modyfikacji].

I dla fermionów i dla bozonów im wyższa energia stanu, tym słabiej jest on obsadzony.

9. Rozpatrzmy gaz Fermiego w obszarze temperatur bliskich zera bezwzględnej. Jaki znak ma $\mu(T=0)$? Gdyby $\mu(T=0)$ było ujemne, to $\langle n_l \rangle$ dla każdego l dążyłoby do zera wraz z T . Prowadziłoby to do absurdalnego wniosku o nieistnieniu cząstek. Znikająca wartość $\mu(T=0)$ dawałaby dla odmiany $\langle n_l \rangle = 1/2$ dla $\varepsilon_l = 0$ i $\langle n_l \rangle = 0$ dla każdej innej energii, co nie wyczerpywałoby zbioru $\langle N \rangle$ cząstek, jeśli $\langle N \rangle > 1$. Stwierdzamy, że $\mu(T=0)$ musi być dodatnie. Wielkość tę oznacza się również symbolem ε_F i nazywa energią Fermiego. W $T=0$ zatem

$$(17) \quad \langle n_l \rangle_{T=0} = \begin{cases} 1 & \varepsilon_l \leq \varepsilon_F \\ 0 & \varepsilon_l > \varepsilon_F \end{cases}$$

a więc wszystkie poziomy o energii mniejszej od ε_F są zajęte, a o większej są puste. Energia Fermiego to maksymalna dozwolona energia pojedynczej cząstki w stanie podstawowym gazu. Interpretacja fizyczna wzoru (17) jest jasna. Przypuśćmy bowiem, że w prostopadłościanie jest średnio $\langle N \rangle$ cząstek. W temperaturze zera bezwzględnej układ musi być w stanie o najniższej energii (co wynika z samej definicji temperatury). W kategoriach stanów jednocząstkowych znaczy to, że pierwszych $(2s+1)$ spośród $\langle N \rangle$ cząstek musi mieć energię zerową. Zgodnie z regułą Pauliego następnych $3(2s+1)$ cząstek obsadzi stany o energii, odpowiadającej liczbom $(m_x, m_y, m_z) = (1, 0, 0), (0, 1, 0)$ i $(0, 0, 1)$. Kolejne cząstki „usadzamy” w stanach o coraz większych liczbach m_x, m_y, m_z aż do wyczerpania zbioru $\langle N \rangle$ cząstek. Zauważmy, że dozwolone wartości pędów umieszczone są w punktach węzłowych sieci prostopadłościennej o stałych sieci $\frac{h}{L_x}$,

$\frac{h}{L_y}$ i $\frac{h}{L_z}$. Pędy odpowiadające energiom mniejszym od ε_F zawierają się w pewnym obszarze wykrojonym z tej sieci. Dla dużych $\langle N \rangle$ obszar ten jest w przybliżeniu kulą, której promień wynosi $p_F = \sqrt{2m\varepsilon_F}$. Ponieważ a) objętość kuli równa jest $\frac{4}{3}\pi p_F^3$, b) objętość przypadająca na jeden dopuszczalny pęd wynosi $\frac{h}{L_x} \cdot \frac{h}{L_y} \cdot \frac{h}{L_z}$ i c) każdy ze stanów pędowych może pomieścić $(2s+1)$ cząstek, gdyż tyle jest stanów spinowych, więc wewnątrz kuli istnieje

$$(18) \quad \frac{4}{3} \pi (2m\varepsilon_F)^{3/2} \frac{L_x L_y L_z}{h^3} (2s+1)$$

dozwolonych stanów. Przyrównanie (18) do $\langle N \rangle$ pozwala wyznaczyć ε_F jako funkcję gęstości, czyli wielkości bezpośrednio mierzonej doświadczalnie:

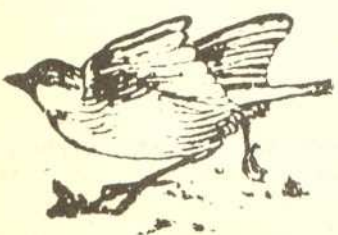
$$(19) \quad \varepsilon_F = \frac{h^2}{2m} \varrho^{2/3} \left(\frac{3}{4\pi(2s+1)} \right)^{2/3}$$

gdzie

$$(20) \quad \varrho = \frac{\langle N \rangle}{L_x L_y L_z} = \frac{\langle N \rangle}{V}$$

przy czym V oznacza objętość podkladu. Zwróćmy uwagę, że wynik ten nie zależy od wyboru długości krawędzi prostopadłościanu i że ε_F , jako związane z $\langle N \rangle$, jest w istocie wielkością średnią.

10. Zastosujmy wzór (19) do gazu elektronów przewodnictwa w metalach. Średnia gęstość elektronów przewodnictwa jest rzędu 10^{23} na cm^3 (cez: $0,91 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3}$, beryl: $2,4 \times 10^{23} \text{ cm}^{-3}$).





Masa elektronu przewodnictwa jest rzędu masy elektronu swobodnego: $m = 9 \times 10^{-28}$ g, a spin $s = 1/2$. Wnioskujemy stąd, że energia Fermiego jest rzędu 10^{-71} J. Jeśli mierzyć tę energię w jednostkach temperatury ($\epsilon_F = k_B T_F$), to odpowiada ona temperaturze Fermiego T_F rzędu 10^5 (i prędkości rzędu 0,01 prędkości światła). Widzimy zatem, że w temperaturze pokojowej elektrony przewodnictwa zachowują się tak, jak w temperaturze 0 K, tzn. znajdują się w stanie podstawowym układu. Dostarczenie do układu energii, odpowiadającej temperaturze pokojowej, nie jest więc praktycznie w stanie „wybić” elektronu z kuli Fermiego, toteż ciepło właściwe gazu elektronowego jest zaniedbywalnie małe. W wypadku gwiazd zwanych białymi karłami, które zbudowane są z jąder helowych i ruchliwych elektronów (zasoby wodoru uległy wyczerpaniu w wyniku ewolucji gwiazdy), gęstość elektronów jest rzędu 10^{30} na cm^3 , co odpowiada temperaturze Fermiego równej 10^{11} K. Temperatura wewnątrz białego karła jest dziesięć tysięcy razy niższa (10^7 K). Z punktu widzenia gazu elektronowego wewnątrz gwiazdy panuje trzaskający mróz. Rozważmy dla odmiany gaz złożony z cząsteczek helu ^3He . Przypuśćmy, że temperatura układu nieco przewyższa 3,35 K, a ciśnienie wynosi 1,18 atm. Obniżenie temperatury poniżej podanej wartości spowodowałoby przejście z fazy gazowej do ciekłej (uwzględnienie w teorii energii oddziaływań byłoby wówczas niezbędne). W takich warunkach $\rho = 3 \times 10^{21}$ cząsteczek/ cm^3 , $\epsilon_F = 2,21 \times 10^{-23}$ J, $T_F = 1,6$ K ($m = 3 \times 1,67 \times 10^{-24}$ g). W porównaniu z hipotetycznym doskonałym gazem helowym, istniejącym w temperaturze 0 K, jego kula Fermiego opustoszała, ostry schodek funkcji $\langle n_i \rangle$ wygładził się w zjeżdżalnię dla dzieci, a potencjał chemiczny μ bardzo zmalał i stał się ujemny (rzędu -6×10^{-23} J). Odwilż.

11. Jak się zachowuje gaz elektronów przewodnictwa w polu magnetycznym? Zauważmy, że energie ϵ_i , oprócz energii kinetycznej cząstki, w obecności pola magnetycznego muszą uwzględniać energię oddziaływania własnego momentu magnetycznego elektronu z polem. Momenty magnetyczne mogą ustawiać się tylko na dwa sposoby, przy czym moment równoległy do pola jest faworyzowany energetycznie. Dla każdego stanu pędowego średnie liczby obsadzeń dla cząstek z momentem „do góry” są większe niż średnie liczby obsadzeń dla cząstek z momentem „do dołu”. W układzie pojawia się więc pewien wypadkowy moment magnetyczny, czyli namagnesowanie. Zjawisko to nosi nazwę paramagnetyzmu Pauliego. Nie jest to jednak jedyny wpływ pola magnetycznego na układ elektronów przewodnictwa. Pole magnetyczne wywiera na elektrony jeszcze siłę Lorentza, pod wpływem której elektrony poruszają się po spiralach. W układzie zostaje indukowany prąd wirowy. Zgodnie z regułą Lenza pole magnetyczne wytworzone przez indukowane prądy ma zwrot przeciwny do pola, które je wywołało. Zjawisko ma zatem charakter diamagnetyczny i nosi nazwę diamagnetyzmu Landaua. Zwrot wypadkowego namagnesowania próbki uzależniony jest od tego, które z dwóch zjawisk przeważa. Najczęściej jest on równoległy do pola.

12. Właściwości doskonałych gazów — bozonowego i fermionowego — są zupełnie odmienne. Stan podstawowy układu bozonów nie jest wyznaczony przez kulę Fermiego. W temperaturze zera stopni nie stosuje się reguła Pauliego i wszystkie bozony znajdują się w stanie o najniższej, czyli zerowej, energii kinetycznej. Gaz bozonów, w odróżnieniu od gazu fermionów, w stanie podstawowym nie wywiera ciśnienia. W $T = 0$ potencjał chemiczny gazu bozonów musi zniknąć, gdyż dodanie do układu dowolnej liczby cząstek nie jest w stanie zmienić całkowitej energii gazu. Stosowanie wzoru (16) nie jest wówczas poprawne. Prawidłowe średnie liczby obsadzeń dane są przez

$$(12) \quad \langle n_i \rangle = \begin{cases} \frac{1}{2s+1} \langle N \rangle, & \text{dla } (2s+1) \text{ stanów o } \epsilon_i = 0 \\ 0 & \text{dla } \epsilon_i \neq 0. \end{cases}$$

[Wzór (16) prowadziłby do niefizycznego zastąpienia $\langle N \rangle$ przez nieskończoność.] Zwiększenie temperatury powoduje stopniowe malenie gigantycznego obsadzenia stanu o zerowej energii i wzbudzenie coraz większej liczby cząstek do stanów o energiach wyższych. Obsadzenie stanu najniższego pozostaje makroskopowo duże do pewnej temperatury krytycznej, która jest rzędu kilku kelwinów. Powyżej tej temperatury wzór (16) może być stosowany do wszystkich stanów. Małe energie pozostają faworyzowane, ale w stanie o zerowej energii jest niewielka liczba cząstek. Potencjał chemiczny staje się wtedy ujemny. Ochłodzenie gazu poniżej temperatury krytycznej prowadzi do przemiany fazowej, zwanej kondensacją Bosego-Einsteina. Sądzi się, że przejście fazowe ciekłego helu ^4He w stan nadciekły ma związek z kondensacją Bosego-Einsteina. Związek ten nie może być prosty, gdyż w sensownej analizie nie sposób jest pominąć energii wzajemnych oddziaływań atomów ciekłego helu. W tak niskich temperaturach (2,19 K) z pewnością nie jest to gaz doskonały.

13. Jeśli temperatura gazu fermionowego lub bozonowego jest dostatecznie wysoka, to $\langle N \rangle$ cząstek rozciągnie się po wszystkich stanach jednocząstkowych. Średnie obsadzenie każdego jednocząstkowego stanu będzie wtedy niewielkie. Wnioskujemy stąd, że w takiej sytuacji $e^{-\mu/k_B T}$, występujące we wzorze (8), musi mieć tak dużą wartość, a więc $\mu/k_B T$ ma tak dużą wartość bezwzględna, że dodanie lub odjęcie jedynki w mianowniku wyrażenia (8) staje się bez znaczenia.



Rozwiązanie zadania F 67

Ponieważ promień nasadki jest mały w porównaniu z rozmiarami trawnika, możemy zaniedbać rozmiary nasadki i założyć, że zasięg strugi wylatującej pod kątem α do pionu jest w przybliżeniu równy odległości R od środka nasadki. Zaniedbamy również różnicę poziomów między elementem nasadki a trawnikiem. Wtedy ruch strugi wody opisany jest przez rzut ukośny, w którym zasięg wynosi

$$(1) \quad R = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g}$$

gdzie v jest prędkością wypływu. Ilość wody padająca na obszar trawnika zawarty między R i $R + dR$ powinna, zgodnie z treścią zadania, wynosić $C \cdot 2\pi R dR$, gdzie C jest pewną stałą gęstością powierzchniową wody (ilość wody nie zależy od położenia R na trawniku). Z drugiej strony, jeśli gęstość otworów na nasadce wynosi $\rho(\alpha)$, to ilość wody polewającej obszar trawnika znajdujący się w odległości $R(\alpha)$ (patrz wzór (1)) wynosi $\rho(\alpha) d\Omega = 2\pi \sin \alpha \rho(\alpha) d\alpha$, gdzie $d\Omega = 2\pi \sin \alpha d\alpha$ jest elementem kąta brylowego zawartym między kątami α i $\alpha + d\alpha$. Musi być zatem spełniony warunek

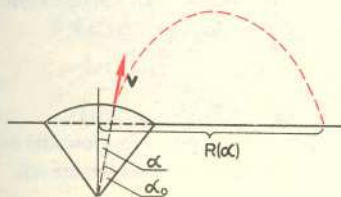
$$2\pi \sin \alpha \rho(\alpha) d\alpha = C \cdot 2\pi R dR.$$

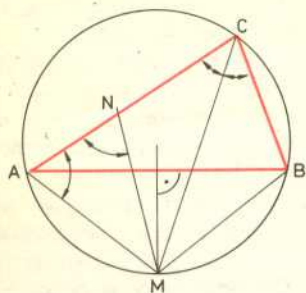
Stąd, wykorzystując wzór (1), dostajemy

$$\rho(\alpha) = \frac{CR}{\sin \alpha} \frac{dR}{d\alpha} = \frac{C}{\sin \alpha} \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g} \times \frac{2v^2 \cos 2\alpha}{g} = \frac{Cv^4 \sin 4\alpha}{g \sin \alpha},$$

czyli

$$\rho(\alpha) \approx \frac{\sin 4\alpha}{\sin \alpha}.$$





Niech M będzie punktem przecięcia dwusiecznej kąta ACB z okręgiem opisanym na trójkącie ABC . Ponieważ kąty ACN i NCB są równe, równe są więc i łuki AN oraz NB , a zatem i długości cięciw AN i NB . Punkt N leży więc na symetralnej boku AB , jest on zatem punktem wspólnym dwusiecznej kąta ACB i symetralnej boku AB oraz leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC .

$$(22) \quad \langle n_i \rangle = e^{\frac{\mu - \epsilon_i}{k_B T}} = \frac{e^{-\epsilon_i / k_B T}}{Z},$$

gdzie $Z = e^{-\mu / k_B T}$. [Wzór (22) uzyskuje się także w granicy małych gęstości: zanik efektów kwantowych.] Mówimy wówczas o klasycznym gazie doskonałym. Znajdźmy Z z warunku $\langle N \rangle = \sum_i \langle n_i \rangle$:

$$(23) \quad Z = \frac{1}{\langle N \rangle} \sum_i e^{-\epsilon_i / k_B T} = \frac{2s+1}{\langle N \rangle} \sum_{m_x} e^{-\frac{h^2 m_x^2}{2m L_x k_B T}} \sum_{m_y} e^{-\frac{h^2 m_y^2}{2m L_y k_B T}} \sum_{m_z} e^{-\frac{h^2 m_z^2}{2m L_z k_B T}}.$$

Dla dużych L_x sumę po m_x pomnożoną przez h/L_x , czyli przez szerokość odstępu między sąsiadującymi wartościami x -owej składowej pędu, świetnie daje się przybliżyć przez całkę względem p_x :

$$(24) \quad \sum_{m_x} e^{-\frac{h^2 m_x^2}{2m L_x k_B T}} = \frac{L_x}{h} \sum_{m_x} \frac{h}{L_x} e^{-\frac{h^2 m_x^2}{2m L_x k_B T}} \approx \frac{L_x}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{p_x^2}{2m k_B T}} dp_x = \frac{L_x}{h} \sqrt{2\pi m k_B T} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

Całka względem t okazuje się mieć wartość $\sqrt{\pi}$. Stąd

$$(25) \quad Z = \frac{L_x L_y L_z}{\langle N \rangle} \frac{2s+1}{h^3} (2\pi m k_B T)^{3/2} = \rho \frac{2s+1}{h^3} (2\pi m k_B T)^{3/2}.$$

W wypadku tlenu w 0°C pod ciśnieniem 1 atm Z jest rzędu 10^6 . Jest to więc wtedy wspaniały gaz klasyczny. Natomiast dla elektronów przewodnictwa Z jest rzędu 10^{-4} w temperaturze pokojowej. Wyrażenie (22) traci wówczas stosowność.

14. Obliczmy teraz ciśnienie wywierane przez klasyczny gaz doskonały. Niech f_i oznacza wartość siły wywieranej przez cząstkę w i -tym stanie na ścianę $x = L_x$ prostopadłościanu. Powierzchnia tej ściany wynosi $L_y \cdot L_z$. Przypuśćmy, że ściana uległa powolnemu przesunięciu o odcinek dL_x , przy czym $\langle N \rangle$ pozostało nie zmienione. Praca $f_i dL_x$, którą wykonuje cząstka na tej ścianie, musi być równa ubytkowi energii — $d\epsilon_i$ cząstki. Stąd

$$(26) \quad f_i = - \frac{d\epsilon_i}{dL_x}.$$

Średnia siła wywierana przez wszystkie cząstki dana jest więc wzorem

$$(27) \quad \langle F \rangle = \sum_i \langle n_i \rangle f_i = \frac{1}{Z} \sum_i e^{-\epsilon_i / k_B T} \left(- \frac{d\epsilon_i}{dL_x} \right) = \frac{k_B T}{Z} \frac{d}{dL_x} \sum_i e^{-\epsilon_i / k_B T} = \frac{\langle N \rangle k_B T}{Z} \frac{dZ}{dL_x} = \frac{\langle N \rangle k_B T}{L_x}.$$

Ciśnienie P jest stosunkiem $\langle F \rangle$ do powierzchni ściany. Uzyskujemy znany i często stosowany wynik

$$(28) \quad P = \frac{\langle N \rangle}{V} k_B T.$$

Jest to prawo klasycznego gazu doskonałego. Dokładniejsze obliczenia, oparte o pełny wzór (8), prowadziłyby do wniosku, że w wysokich temperaturach doskonały gaz fermionowy wywierałoby nieco większe, a bozonowy nieco mniejsze ciśnienie.

Gdybyśmy w tym artykule zamiast $1/k_B T$ używali symbolu β , wprowadzonego poprzednio (Delta 5/1979) wzór (28) identyfikowałby βk_B z odwrotnością temperatury. Gdybyśmy wreszcie rozpatrywali układ o ściśle określonej liczbie cząstek N i posługiwali się zespołem kanonicznym, uzyskalibyśmy wynik (28) z tym, że $\langle N \rangle$ zostałyby zastąpione przez N . Jest to przykład termodynamicznej równoważności zespołów statystycznych.

Niech Czytelnik nie obawia się, że zaproponuje mu się teraz badanie układów bardziej skomplikowanych niż gazy doskonałe. Wystarczy stwierdzić, że teoria statystyczna prowadzi do zrozumienia właściwości np. tak intrygujących układów, jak zbiór momentów magnetycznych ferromagnetyka.