Tak więc foton oddziałuje z materią w postaci niewielkiego obiektu, ale nie potrafimy przewidzieć, gdzie nastąpi to oddziaływanie. Możemy obliczyć jedynie prawdopodobieństwo dla każdego takiego miejsca i prawdopodobieństwo to rozchodzi się (?) jak fala. Fala fotonowa ma określoną długość i częstość $\left(E = h\nu,\ p = \frac{h}{\lambda}\right)$, a równania, za pomocą których możemy obliczyć jej własności, to nic innego, jak stare równania Maxwella-Faradaya. I to właśnie nazywamy teorią kwantową (w wersji dla fotonów nazywamy ją elektrodynamiką kwantową). Bardzo dziwna to teoria. Przeszła ona jednak wszystkie testy doświadczalne. Dzięki niej zbudowano tranzystory i lasery. Czego jeszcze chcecie?! Że jakoś serce ściskają te prawdopodobieństwa...

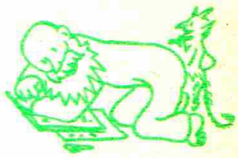
Jaki więc jest ten obraz świata dyktowany przez uznaną powszechnie teorię kwantową? Czy musimy raz na zawsze uwierzyć, że cała otaczająca nas materia składa się z obiektów nieprecyzyjnych o własnościach, które z natury rzeczy nie są jednoznaczne? Chyba nie. Zwróćmy bowiem uwagę na fakt, że rozmiary elektronu nie są większe niż $10^{-17}$ m, a osiągalna dokładność pomiaru położenia wynosi nie więcej niż $10^{-7}$ m. Dziesięć rzędów wielkości! Czy możemy więc twierdzić, że wszystko o tym elektronie wiemy? Czy butla z gazem umieszczona na Marsie ujawniłaby nam swój skład, rodzaje i pędy cząsteczek oraz siły działające między nimi? Nawet temperaturę trudno byłoby zmierzyć. Trzeba by było bowiem zbadać promieniowanie tej butli. Podobnie badamy cząstki przez ich oddziaływania elektromagnetyczne z przyrządami (ślady jonizacyjne w kliszach i komorach pęcherzykowych). Już z samej natury tych doświadczeń wynika konieczność posługiwania się opisem statystycznym. Ponieważ jednak nie wszystkim taki opis się podoba, tak jak nie podobało się newtonowskie oddziaływanie na odległość, to może warto szukać innego. Na to pytanie nie ma właściwie odpowiedzi. Mechanika kwantowa jest teorią prawdopodobnie niesprzeczną formalnie i świetnie zgadza się z doświadczeniem. Podobnie jak teoria Newtona 200 lat temu. Tylko te nieprecyzyjne fotony nie mieszczą się w głowie.

Na zakończenie trzeba jednak zwrócić uwagę na fakt, że nie wszystko w teorii kwantowej jest zupełnie w porządku. Nie udało się dotąd opisać przy jej pomocy oddziaływań grawitacyjnych. Jako niesłychanie słabe wydają się one zupełnie bez znaczenia dla zachowania się cząstek.

A jednak... Gdyby Wszechświat był tworem zamkniętym, co dopuszcza ogólna teoria względności, wtedy, zgodnie z prawami mechaniki kwantowej, czas i przestrzeń powinny być dyskretne, nieciągłe. Może więc mikroczasoprzestrzeń jest właśnie nieciągła. Wbrew pozorom można by to zmierzyć, wykorzystując relatywistyczny efekt spowolnienia czasu w układach poruszających się bardzo szybko. Doświadczeń takich nie da się jednak na razie wykonać. Wciąż więc nie ma, niestety, żadnych powodów, żeby cokolwiek zmieniać w istniejącej strukturze teorii.

Świat jest tak zbudowany,
jak Bóg to sobie obliczył.
*Gottfried Wilhelm Leibniz*

Czy jednak ludzie obliczają teraz tak, jak to robił Bóg? Czy matematyka naprawdę dobrze nadaje się do opisu rzeczywistości?



# O liczbach nieosiągalnych

## *Mgr Andrzej PELC*

Zbiory skończone umiemy porównywać pod względem wielkości. Najprostszy sposób, to policzyć, ile elementów ma każdy z nich, i porównać otrzymane liczby naturalne. Większy będzie ten zbiór, którego liczba elementów okaże się większa.

Można jednak postąpić inaczej. Wyobraźmy sobie salę balową, w której jest wiele osób. Jak bez liczenia przekonać się, czy jest więcej kobiet, czy mężczyzn? Wystarczy, że orkiestra zagra dobrą muzykę taneczną; balowicze połączą się w pary (to jest bal, a nie dyskoteka) i każdy, kto tylko znajdzie partnera, ruszy w tany. Rzut oka na salę pozwoli stwierdzić, która płeć była liczniej reprezentowana: jeśli pozostali panowie bez tancerek — było ich więcej, jeśli panie bez partnerów one stawiły się liczniej. Jeśli zaś nikt nie podpiera ścian, panowała idealna równowaga liczebna. Zwróćmy uwagę, że ten drugi sposób porównywania wielkości zbiorów ma pewną przewagę nad pierwszym. Obywa się on mianowicie bez pojęcia liczby i dzięki temu daje się łatwo uogólnić na zbiory nieskończone. Trzeba tylko odpowiednio sprecyzować pojęcie ustawiania w pary. Powiemy mianowicie, że zbiory $A$ i $B$ są równoliczne, jeśli istnieje funkcja, przekształcająca zbiór $A$ na cały zbiór $B$, o tej własności, że różnym elementom przypisuje różne wartości. Podobnie, zbiór $B$ jest liczniejszy od zbioru $A$, jeśli nie ma funkcji odwzorowującej $A$ na cały zbiór $B$. W naszym przykładzie sali balowej pierwsza sytuacja odpowiada przypadkowi, gdy wszyscy mogli zatańczyć, Zauważmy jednak, że jeżeli zbiory $A$ i $B$ są nieskończone, to czasem można ich elementy ustawić w pary tak, że np. tylko jeden element zbioru $A$ zostanie bez pary, na przykład: $A =$ zbiór liczb naturalnych, $B =$ zbiór liczb naturalnych, $f(n) = n+1$, albo dwa $(\dots f(n) = n+2)$, albo np. bez pary będzie nieskończenie wiele elementów z $B$ $(\dots f(n) = 100 \cdot n)$.

a druga, gdy pewna ilość osób którejś płci została bez pary. Nasza definicja jest ogólna, nie ogranicza się bynajmniej do przypadku zbiorów skończonych. Możemy teraz zbiorom przyporządkować pewne obiekty zwane liczbami kardynalnymi w ten sposób, by ten sam obiekt przyporządkowany był zbiorom $A$ i $B$ wtedy i tylko wtedy, gdy są one równoliczne. Liczbę kardynalną zbioru $A$ oznaczamy $|A|$. Liczba kardynalna danego zbioru informuje nas więc, ile ma on elementów w tym samym sensie, w jakim czyni to liczba naturalna określająca ilość elementów zbioru skończonego. Dla zbiorów skończonych liczba kardynalna zbioru jest to ta właśnie liczba naturalna. Z dwóch liczb kardynalnych $\mathfrak{m}$ i $\mathfrak{n}$ ta jest większa, która przyporządkowana została zbiorowi liczniejszemu. Piszemy $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$, gdy $\mathfrak{n}$ jest większa od $\mathfrak{m}$.

Łatwo można podać przykład nieskończenie wielu liczb kardynalnych, mianowicie wszystkie liczby naturalne. Istnieje jednak również wiele różnych liczb kardynalnych przyporządkowanych zbiorom nieskończonym. Jako przykład niech posłużą tu:

liczba kardynalna zbioru liczb naturalnych,
liczba kardynalna zbioru liczb rzeczywistych,
liczba kardynalna zbioru funkcji o argumentach rzeczywistych przyjmujących wartości rzeczywiste.

Można udowodnić, że żadne z wymienionych zbiorów nieskończonych nie są równoliczne, a więc odpowiadające liczby kardynalne są różne (wypisane są w kolejności od najmniejszej do największej). Można również udowodnić, że zbiór podzbiorów danego zbioru $X$ (oznaczany $\mathrm{P}(X)$) jest zawsze od niego liczniejszy, tak więc możemy wypisać ciąg zbiorów nieskończonych coraz liczniejszych: $N$, $\mathrm{P}(N)$, $\mathrm{P}(\mathrm{P}(N))$, .... Odpowiadający mu ciąg liczb kardynalnych będzie więc ściśle rosnący.

Zastanówmy się teraz, w jaki sposób można tworzyć zbiory coraz liczniejsze. Jedna metoda to tworzenie zbioru podzbiorów, o czym była mowa powyżej. Druga zaś to tworzenie sum zbiorów. Zauważmy, jaką właściwość ma pierwsza liczba kardynalna odpowiadająca zbiorowi nieskończonemu (jest to liczba kardynalna zbioru liczb naturalnych oznaczana hebrajską literą $\aleph_0$): obie wymienione operacje dokonywane na zbiorach o mocach mniejszych od tej liczby dają zbiory o mocy w dalszym ciągu od niej mniejszej. Dokładniej

1. Liczba kardynalna zbioru podzbiorów zbioru skończonego jest skończona (tj. mniejsza od $\aleph_0$).
2. Liczba kardynalna sumy skończonej ilości zbiorów skończonych jest skończona.

Wprowadźmy teraz następującą definicję: liczbę kardynalną $\mathfrak{m}$ nazywamy liczbą nieosiągalną wtedy i tylko wtedy, gdy:

1. Jeśli $|X| < \mathfrak{m}$, to $|\mathrm{P}(X)| < \mathfrak{m}$.
2. Jeśli $\mathscr{A}$ jest rodziną zbiorów taką, że $|\mathscr{A}| < \mathfrak{m}$ i wszystkie zbiory $A$ należące do rodziny $\mathscr{A}$ mają liczbę kardynalną mniejszą od $\mathfrak{m}$, to suma zbiorów rodziny $\mathscr{A}$ ma liczbę kardynalną mniejszą od $\mathfrak{m}$.

Można powiedzieć, że liczba nieosiągalna to taka, której nie można wyprodukować stosując na mniej licznych zbiorach wspomniane operacje.

Jakie są przykłady liczb nieosiągalnych? Wszyscy Czytelnicy zauważą z pewnością, że najmniejszą taką liczbą jest 0. Nie jest ona jednak specjalnie ciekawa, więc pominiemy ją w dalszych rozważaniach. Następną liczbą nieosiągalną jest — jak zostało wyżej zauważone — $\aleph_0$, pierwsza liczba kardynalna nieskończona. Dalsza liczba nieosiągalna byłaby więc w stosunku do mniejszych od niej liczb tym, czym $\aleph_0$ jest w stosunku do liczb skończonych. Można więc traktować ją jako „hipernieskończoną". Pytanie, czy istnieje liczba nieosiągalna większa od $\aleph_0$, wydaje się być interesujące. Wszyscy niemal matematycy zakładają istnienie zbiorów nieskończonych, jak więc jest z „hipernieskończonymi"?

Pytanie to jest jednym z najważniejszych nie rozwiązanych problemów współczesnej teorii mnogości. Jego pozycja w matematyce wydaje się dość osobliwa. Udowodniono, że pozytywna odpowiedź nie może zostać wykazana, nadal jednak otwarty pozostaje problem, czy można dać odpowiedź negatywną, tj. czy można udowodnić w matematyce, że nie ma liczb nieosiągalnych większych od $\aleph_0$.

Co pewien czas specjalistów od teorii mnogości elektryzuje wiadomość, że ktoś udowodnił nieistnienie tych liczb. Pewna grupa osób gorączkowo studiuje nowy dowód, aż wreszcie okazuje się ... że jest to kolejny fałszywy alarm: w dowodzie tkwi mniej lub bardziej widoczny błąd. Jedni matematycy wierzą, że kiedyś uda się wykazać nieistnienie nieprzeliczalnych liczb nieosiągalnych. Są tacy, którzy strawili całe lata bezskutecznie próbując znaleźć dowód. Inni sceptycznie odnoszą się do tych wysiłków i skłonni są dodawać hipotezę istnienia dużych liczb nieosiągalnych do powszechnie przyjmowanych aksjomatów teorii mnogości. W uzyskanej w ten sposób silniejszej teorii dowodzą twierdzeń, których nie udałoby się wykazać bez tego założenia. Z ulgą witają oni wiadomość, że kolejna próba obalenia hipotezy liczb nieosiągalnych spełzła na niczym.

Plotki o nowym rewelacyjnym dowodzie nasilają się zwłaszcza w okresie primaaprilisowym. Na kawał o „dowodzie, który tym razem jest z pewnością bezbłędny", mimo że często używany, zawsze nabierają się jacyś naiwni. Jeśli więc w którymś numerze Delty znajdziecie nadzwyczajny dodatek pt. „Nie ma nieprzeliczalnej liczby nieosiągalnej", sprawdźcie, czy nie jest to numer kwietniowy.

**Rozwiązanie zadania M 197**

Prawdopodobieństwo przekazania wiadomości linią bezpośrednią jest oczywiście równe $p$. Aby znaleźć prawdopodobieństwo przekazania wiadomości siecią z drugiego wariantu, oznaczmy przez $A_i$ zdanie mówiące, że na odcinku $a_i$ nie ma uszkodzenia.

Jeżeli linia $a_1$ jest sprawna, to przekazanie wiadomości z $A$ do $B$ jest możliwe, gdy zachodzi

$$Z_1 = (A_2 \vee A_4) \wedge (A_3 \vee A_5).$$

Prawdopodobieństwo tego wynosi, jak nietrudno obliczyć, $(1-(1-p)^2)^2$. Jeżeli linia $a_1$ jest niesprawna, to musi zajść

$$Z_2 = (A_2 \wedge A_3) \vee (A_4 \wedge A_5).$$

Prawdopodobieństwo tego zdarzenia wynosi $1-(1-p^2)^2$. Prawdopodobieństwo przekazania wiadomości siecią jest sumą $p \cdot P(Z_1) + (1-p) \cdot P(Z_2)$ i wynosi zatem $p(2p^4-5p^3+2p^2+2p)$. Drugi wariant połączenia będzie pewniejszy, gdy $p(2p^4-5p^3+2p^2+2p)-p > 0$, tj. $p(p-1)\left(p-\frac{1}{2}\right)(p^2-p-1) > 0$, zatem gdy $\frac{1}{2} < p < 1$.