Jak to się stało, że matematyka, produkt myśli ludzkiej niezależny od doświadczenia, tak wspaniale pasuje do świata realnego?

Albert Einstein

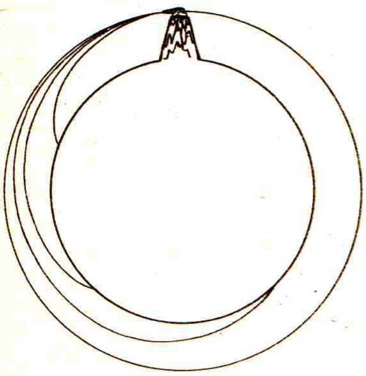
Jabłko i Księżyc

Mgr Danuta MAZUREK

Isaac Newton po sformułowaniu praw dynamiki stworzył słynną teorię grawitacji, a raczej prawo powszechnego ciążenia, na którym cała ta teoria jest oparta. Stwierdzenie faktu, że Księżyc spada na Ziemię podobnie jak ciała swobodnie puszczone przy jej powierzchni, wydaje się przy ówczesnym stanie wiedzy wręcz niemożliwe.

W artykule tym wprowadzimy prawo powszechnego ciążenia tak, jak prawdopodobnie zrobił to Newton 300 lat temu.

Widzimy i wiemy z obserwacji astronomicznych, że Księżyc porusza się wokół Ziemi po torze zbliżonym do okręgu. Dla uproszczenia przyjmiemy, że ruch Księżyca jest ruchem jednostajnym po okręgu. Jeżeli ciało porusza się po torze zakrzywionym, to musi działać na nie jakaś siła. Na ciała znajdujące się na powierzchni Ziemi działa siła przyciągania zwana siłą ciężkości, skierowana ku środkowi kuli ziemskiej. Pojęcie takiej siły wprowadził już Galileusz. W roku 1665 Newton w swoich notatkach umieścił następującą uwagę: „Podczas tego roku zacząłem rozmyślać nad siłą ciążenia rozciągającą się po orbitę Księżyca i porównywałem siłę potrzebną do utrzymania Księżyca na orbicie z siłami ciężkości na powierzchni Ziemi". Czy siła działająca na Księżyc i siła działająca na swobodnie spadające ciała może być tego samego pochodzenia? Nasze rozważania będą teraz bardzo nieprecyzyjne, ale za to bardzo podobne do rozważań Newtona. Najważniejsze, że zaprowadzą nas do celu, tak jak i jego zaprowadziły.



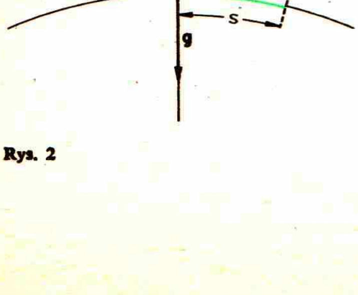
Rys. 1

Badaniem spadających ciał zajmował się Galileusz, który stwierdził, że wszystkie ciała spadają ruchem jednostajnie przyspieszonym z jednakowym przyspieszeniem. Stwierdził też, że poziomo rzucony z wieży kamień będzie spadać po paraboli i im większa będzie jego prędkość początkowa, tym dalej upadnie. Widzimy to na rysunku 1, który pochodzi z Principiów Newtona. Rysunek sugeruje nam, że być może przy bardzo dużej prędkości początkowej kamień mógłby okrążyć Ziemię dookoła i stałby się jej sztucznym satelitą. Rozważmy rzut poziomy na kuli (patrz rysunek 2). Każda powierzchnia kulista jest powierzchnią lokalnie płaską. Oznacza to, że wycinek powierzchni kuli o bardzo małej powierzchni w stosunku do powierzchni kuli możemy traktować jako obszar płaski, tym bardziej, im mniejsza jest długość łuku s w porównaniu z obwodem koła wielkiego.

Z wieży rzucamy jabłko z prędkością v. (Powinniśmy się wytłumaczyć z tytułu artykułu. Otóż legenda mówi, że Newton zauważył analogię między ruchem Księżyca i ruchem swobodnie spadających ciał, siedząc pod jabłonią i obserwując Księżyc na niebie i spadające jabłka z jabłoni. Tłumaczy to, dlaczego i my rzucać będziemy z wieży jabłka a nie „ciała".) Ruch cienia jabłka na osi X będzie ruchem jednostajnie opóźnionym, a na osi Y ruchem jednostajnym. W naszym układzie współrzędnych równania ruchu mają postać:

(1) $$x = -\frac{1}{2}at^2, \qquad y = v \cdot t,$$

gdzie a jest przyspieszeniem, v prędkością początkową jabłka, zaś t czasem ruchu. Chcemy, aby jabłko poruszało się po łuku paraboli, który w przybliżeniu ma się pokrywać z łukiem okręgu o promieniu R. Będzie to spełnione tylko dla bardzo małych łuków s, czyli dla bardzo małych czasów t. Współrzędne x i y mają spełniać równanie okręgu $(x+R)^2+y^2 = R^2$. Wstawmy związki (1) do tego równania:



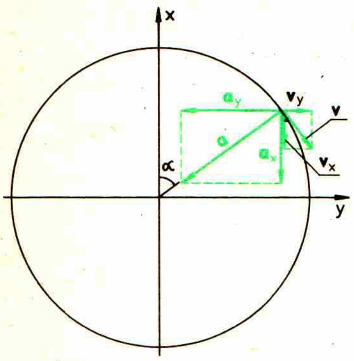
Rys. 2

$$\frac{1}{4}a^2t^4 - Rat^2 + R^2 + v^2t^2 = R^2.$$

Dla bardzo małych czasów t wyrażenie pierwsze możemy pominąć, jako dużo mniejsze od pozostałych. Otrzymamy wtedy

(2) $$a = \frac{v^2}{R}.$$

A oto ściśle wyprowadzenie wzoru na przyspieszenie dośrodkowe w ruchu jednostajnym po okręgu.



Oznaczenia: r — promień okręgu, v — stała prędkość liniowa, $\omega = \frac{v}{r}$ — stała prędkość kątowa, a — przyspieszenie, t — czas.

$$\text{(i)} \quad \begin{aligned} v_x &= -v\sin\alpha = -v\frac{y}{r} = -\omega y \\ v_y &= v\cos\alpha = v\frac{x}{r} = \omega x, \end{aligned}$$

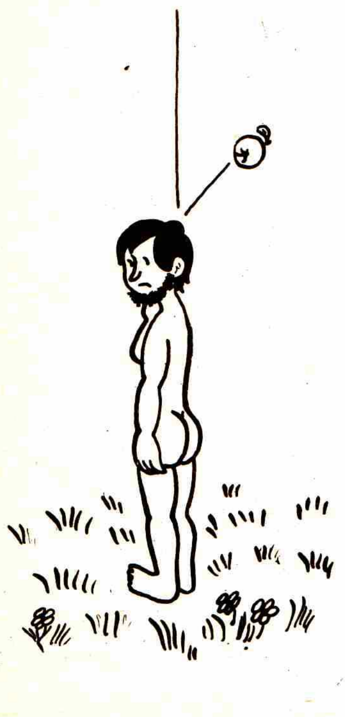
$$\text{(ii)} \quad \begin{aligned} a_x &= \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = -\omega\frac{\Delta y}{\Delta t} = -\omega v_y \\ a_y &= \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = \omega\frac{\Delta x}{\Delta t} = \omega v_x. \end{aligned}$$

Wstawiamy (i) do (ii):

(iii) $a_x = -\omega v\cos\alpha, \quad a_y = -\omega v\sin\alpha.$

Z (iii) widać, że przyspieszenie wypadkowe $a = a_x + a_y$ skierowane jest wzdłuż promienia do środka okręgu. Wartość przyspieszenia

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \omega \cdot v = \frac{v^2}{r}.$$



Z rysunku 2 widzimy też, że przyspieszenie to skierowane jest do środka okręgu (przyspieszenie dośrodkowe). A zatem, aby jabłko rzucone z wieży z prędkością v mogło poruszać się po okręgu o promieniu R, musi działać siła nadająca jabłku przyspieszenie dośrodkowe równe $\frac{v^2}{R}$.

Zachodzi też twierdzenie odwrotne: gdy pewna siła nadaje jabłku przyspieszenie skierowane stale do jednego punktu, to jabłko będzie poruszało się po okręgu, jeżeli nadamy mu prędkość $v = \sqrt{aR}$.

Przyspieszenie a dla rzuconego jabłka równa się przyspieszeniu ziemskiemu g. Przyspieszenie ziemskie jest zawsze skierowane do środka Ziemi. Siła ciężkości działająca na jabłko jest więc siłą dośrodkową (centralną). Księżyc porusza się po okręgu naokoło Ziemi. Musi więc działać nań siła skierowana zawsze do środka Ziemi. Oznacza to, że Księżyc też spada na Ziemię, choć nigdy się z nią nie zderzy. Znając okres obrotu Księżyca dookoła Ziemi ($T =$ $= 27{,}3$ dnia) i promień jego orbity ($r \simeq 384\,400$ km) możemy obliczyć przyspieszenie spadania Księżyca. Po przekształceniu wzoru (2) za pomocą związku $v = \frac{2\pi r}{T}$ otrzymamy

$$a_K = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r \simeq 0{,}0027\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Obliczmy stosunek przyspieszenia swobodnego spadania ciał przy powierzchni Ziemi do przyspieszenia spadania Księżyca oraz stosunek promienia orbity Księżyca do promienia Ziemi ($R = 6370$ km)

$$\frac{g}{a_K} = 3633, \qquad \frac{r}{R} = 60{,}3.$$

Zauważmy, że kwadrat liczby 60,3 jest bliski liczbie 3633. Jeżeli więc założymy, że oba spadki są wywołane przez tę samą siłę (siłę ciężkości), to najprostsze prawo dla tej siły dostaniemy zakładając odwrotną jej proporcjonalność do kwadratu odległości. Jednocześnie z trzeciego prawa dynamiki Newtona (prawa „akcji i reakcji") wynika, że jeżeli Ziemia przyciąga ciała z siłą $F = ma$ (m — masa ciała), to te ciała przyciągają Ziemię z siłą o tej samej wartości $F = Ma_Z$ (M — masa Ziemi, a_Z — przyspieszenie Ziemi) i przeciwnym zwrocie. Ponieważ przyspieszenie grawitacyjne ciał nie zależy od ich mas, więc siła przyciągania powinna być proporcjonalna do iloczynu mas Ziemi i jabłka (lub Księżyca). Zakładamy więc, że Ziemia przyciąga wszystkie ciała z siłą wprost proporcjonalną do iloczynu masy ciała i Ziemi i odwrotnie proporcjonalną do kwadratu ich odległości. I podobnie działają te ciała na Ziemię. Wtedy Słońce przyciąga Ziemię, a Ziemia Słońce. Słońce przyciąga też wszystkie inne planety Układu Słonecznego. A zatem wszystkie ruchy planet, ich księżyców oraz spadających na nie ciał powinny być opisywane przez prawo powszechnego ciążenia

$$F = k\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{3}$$

gdzie m_1 i m_2 są masami przyciągających się ciał, a k jest stałą proporcjonalności. Jest to prawda, jeżeli trafnie opisaliśmy analogię między ruchem jabłka i księżyca.

Po odkryciu Mikołaja Kopernika wiadomo było, że planety w Układzie Słonecznym krążą naokoło Słońca. Charakterystyczne cechy tego ruchu zostały zebrane w postaci tzw. praw Keplera. Newton wyprowadził ściśle te prawa posługując się sformułowanym prawem powszechnego ciążenia. W ten sposób dynamika Układu Słonecznego została sprowadzona do wzoru (3).

Warto dodać, że prawo powszechnego ciążenia przewiduje przyciąganie się dwóch dowolnych mas. Wynika z tego, że np. jabłko przyciągane jest przez każdy element Ziemi. Dlaczego więc wypadkowa tych wszystkich sił skierowana jest do środka Ziemi? Aby pokazać, że tak być musi, Newton przez dwadzieścia lat tworzył rachunek całkowy (równie nieporządny, choć skuteczny, jak i newtonowski rachunek różniczkowy, którego fragment przytoczyliśmy) i o tyle też opóźnił ogłoszenie swych wyników. Stałą k zwaną inaczej stałą grawitacji wyznaczył Henry Cavendish w siedemdziesiąt lat po śmierci Newtona $\left(\text{dziś przyjmuje się } k = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2}\right)$. Pomiary Cavendisha były jednocześnie potwierdzeniem prawa grawitacji nie tylko dla ciał niebieskich.

Fakty pozornie nie mające ze sobą nic wspólnego, jak ruch Księżyca na niebie i swobodne spadanie ciał na Ziemi, doprowadziły Newtona do teorii, która dziś nie tylko opisuje ruch planet. Także tory satelitów startujących z Ziemi są obliczane na podstawie prawa powszechnego ciążenia. A najpiękniejszym jego potwierdzeniem było wylądowanie ludzi na Księżycu.