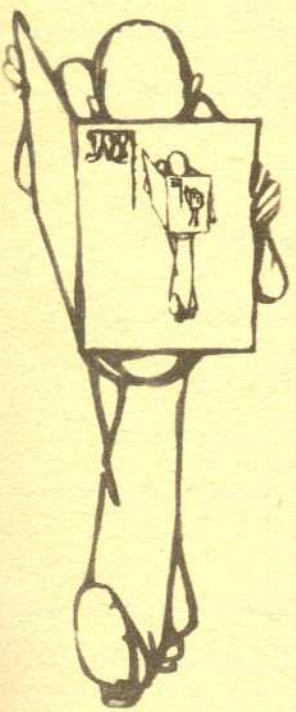
Ułamki łańcuchowe

Prof. dr Andrzej SCHINZEL



Ułamkiem łańcuchowym skończonym lub nieskończonym nazywamy wyrażenie typu odpowiednio

$$(1)\quad b_0+\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\ddots+\cfrac{a_n}{b_n}}}\qquad \text{lub}\quad (2)\quad b_0+\cfrac{a_1}{b_1+\ddots+\cfrac{a_n}{b_n+\ddots}}$$

gdzie a_i, b_i są elementami dowolnego ciała. Ułamki takie zapisujemy prościej w postaci

$$b_0+\frac{a_1|}{|b_1}+\frac{a_2|}{|b_2}+\ldots+\frac{a_n|}{|b_n}\quad \text{lub}\quad b_0+\frac{a_1|}{|b_1}+\ldots+\frac{a_n|}{|b_n}+\ldots.$$

W niniejszym artykule ograniczymy się do omówienia ułamków łańcuchowych, których liczniki a_i i mianowniki b_i (obejmowane niekiedy wspólną nazwą wyrazów ułamka łańcuchowego) są liczbami rzeczywistymi. Takim ułamkom skończonym można przypisać wartość liczbową, jeżeli wszystkie zaznaczone dzielenia są wykonalne, tzn. wszystkie wyrazy ciągu określonego rekurencyjnie wzorami

$$c_0 = b_n,\quad c_k = b_{n-k}+\frac{a_{n-k+1}}{c_{k-1}}\quad (1 \leqslant k < n)$$

są różne od zera. Liczbę $c_n = b_0+\dfrac{a_1}{c_{n-1}}$ nazywamy wówczas wartością ułamka (1) i piszemy

$$b_0+\frac{a_1|}{|b_1}+\ldots+\frac{a_n|}{|b_n} = c_n.$$

Inny sposób obliczania wartości ułamka łańcuchowego podaje twierdzenie następujące.

Twierdzenie 1. *Połóżmy* $P_{-1} = 1$, $Q_{-1} = 0$, $P_0 = b_0$, $Q_1 = 1$ *oraz*

$$\begin{aligned} P_k &= P_{k-1}b_k+P_{k-2}a_k \\ Q_k &= Q_{k-1}b_k+Q_{k-2}a_k \end{aligned}\qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Jeżeli ułamek łańcuchowy (1) *ma oznaczoną wartość* w, *to*

$$w = \frac{P_n}{Q_n}.$$

Liczbę $b_0+\dfrac{a_1|}{|b_1}+\ldots+\dfrac{a_k|}{|b_k}$, jeśli jest określona, nazywamy k-tym reduktem ułamka łańcuchowego (2), a dla $k \leqslant n$ również ułamka łańcuchowego (1). Jeśli dla ułamka łańcuchowego (2) redukty R_k są określone dla prawie wszystkich k i ciąg R_k jest zbieżny, to ułamek łańcuchowy nazywamy zbieżnym, a granicę $\lim\limits_{k\to\infty} R_k = w$ nazywamy jego wartością i piszemy

$$b_0+\frac{a_1|}{|b_1}+\ldots+\frac{a_n|}{|b_n}+\ldots = w.$$

Zapis ten nie jest całkiem konsekwentny (właściwie należałoby odróżniać ułamek łańcuchowy od jego wartości), ale jest uświęcony tradycją i nie doprowadza w praktyce do nieporozumień.

Podobnie symbol $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ oznacza zarazem szereg nieskończony i jego sumę.

Na temat ułamków łańcuchowych o wyrazach dodatnich mamy dwa następujące twierdzenia.

Twierdzenie 2. *Jeżeli liczby* a_k, b_k *są dodatnie dla* $k \geqslant 1$, *a ułamek* (2) *jest zbieżny, to redukty rzędu parzystego przybliżają jego wartość z niedomiarem, a redukty rzędu nieparzystego z nadmiarem.*

Twierdzenie 3. *Jeżeli* $a_k = 1$ *i* $b_k > 0$ *dla* $k \geqslant 1$, *to ułamek* (2) *jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy szereg* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *jest rozbieżny.*

Szczególnie ważne są tzw. ułamki łańcuchowe arytmetyczne, tj. takie, których liczniki a_k są wszystkie równe 1, a mianowniki b_k dla $k \geqslant 1$ są liczbami naturalnymi oraz b_0 jest liczbą całkowitą. Na mocy twierdzenia 3 ułamki łańcuchowe arytmetyczne nieskończone są zbieżne. Wartość każdego ułamka łańcuchowego arytmetycznego skończonego jest liczbą wymierną. Odwrotnie, łatwo dowieść, że każda liczba wymierna różna od 1 ma dokładnie jedno rozwinięcie na ułamek łańcuchowy arytmetyczny, *normalne*, tj. z ostatnim mianownikiem różnym od 1. Rozwinięcie to można otrzymać przy pomocy algorytmu Euklidesa. Na przykład celem rozwinięcia na ułamek łańcuchowy liczby 96/65 znajdujemy kolejno

$$96 = 1\cdot 65+31,\quad 65 = 2\cdot 31+3,\quad 31 = 10\cdot 3+1,\quad 3 = 3\cdot 1,$$

skąd

$$\frac{96}{65} = 1+\frac{1|}{|2}+\frac{1|}{|10}+\frac{1|}{|3}.$$

Mamy dalej

Rozwiązanie zadania M 194.
Nietrudno zauważyć, że n-1 mnożeń $a \cdot a = a^2$, $a \cdot a^2 = a^3, \ldots, a \cdot a^{n-1} = a^n$ jest rozwiązaniem bardzo nieekonomicznym. Jeżeli bowiem $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$, to wystarczy znaleźć potęgi $a^2 = a \cdot a$, $a^4 = a^2 \cdot a^2, \ldots,$ $a^{2k} = a^k \cdot a^k$, a następnie pomnożyć te ze znalezionych potęg, którym odpowiadają jedynki w rozwinięciu dwójkowym $n = c_0 + 2c_1 + 2^2c_2 + \ldots + 2^kc_k$. W ten sposób znajdziemy a^n po wykonaniu najwyżej $2k = 2\,[\log_2 n]$ mnożeń.
Uwaga: W pewnych wypadkach (jakich — pozostawiamy Czytelnikom) i ta strategia nie jest optymalna.

Twierdzenie 4. *Wartość każdego ułamka łańcuchowego arytmetycznego nieskończonego jest liczbą niewymierną. Każda liczba niewymierna ma dokładnie jedno rozwinięcie na ułamek łańcuchowy arytmetyczny nieskończony.*

Rozwinięcie liczby niewymiernej w, o którym mowa w twierdzeniu, znajdujemy jak następuje. Kładziemy $x_0 = w$, $b_0 = [x_0]$ (całość z x_0) i dalej stosujemy wzory zwrotne

$$x_{k+1} = \frac{1}{x_k - b_k}, \qquad b_{k+1} = [x_{k+1}].$$

Dla ułamków łańcuchowych arytmetycznych zachodzi ważny wzór

$$P_{k-1}Q_k - Q_{k-1}P_k = (-1)^k.$$

Ponieważ liczby P_k i Q_k są całkowite, wynika stąd, że ułamki P_k/Q_k są nieskracalne. Ułamki te przybliżają wartość ułamka łańcuchowego, którego są reduktami z dużą dokładnością. Mamy istotnie

Twierdzenie 5. *Jeżeli w jest wartością, zaś P_k/Q_k ($k = 0, 1, \ldots$) kolejnymi reduktami ułamka łańcuchowego arytmetycznego, to*

$$\left|w - \frac{P_k}{Q_k}\right| < \frac{1}{Q_k^2} \qquad \textit{dla wszystkich } k \geqslant 1,$$

$$\left|w - \frac{P_k}{Q_k}\right| < \frac{1}{2Q_k^2} \qquad \textit{dla co najmniej jednego z dwóch kolejnych } k \geqslant 1,$$

$$\left|w - \frac{P_k}{Q_k}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}\,Q_k^2} \qquad \textit{dla co najmniej jednego z trzech kolejnych } k \geqslant 1.$$

Stałej $\sqrt{5}$ występującej w twierdzeniu nie można już poprawić. Istotnie dla rozwinięcia

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1 + \frac{1\,|}{|\,1} + \frac{1\,|}{|\,1} + \ldots \tag{3}$$

liczby P_k, Q_k są odpowiednio równe $(k+2)$-emu i $(k+1)$-emu wyrazowi ciągu Fibonacciego a mamy

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{\sqrt{5}+1}{2} - \frac{P_k}{Q_k}\right| Q_k^2 = \sqrt{5}.$$

Przybliżenie wartości ułamka łańcuchowego przez jego redukty jest nie tylko dobre, ale również najlepsze możliwe, w sensie sprecyzowanym przez następujące

Twierdzenie 6. *Jeżeli liczba wymierna r/s o mianowniku naturalnym jest lepszym przybliżeniem liczby w niż redukt R_n ($n \geqslant 1$) rozwinięcia w na ułamek łańcuchowy arytmetyczny, to mianownik s jest większy od mianownika reduktu R_n.*

Ułamek łańcuchowy arytmetyczny $b_0 + \frac{1\,|}{|\,b_1} + \frac{1\,|}{|\,b_2} + \ldots$ nazywamy okresowym, jeżeli ciąg b_n jest okresowy poczynając od pewnego miejsca.

Jak widać ze wzoru (3) rozwinięcie liczby $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ jest okresowe. Nie jest to przypadek. Mamy

Twierdzenie 7. *Każdy ułamek łańcuchowy arytmetyczny okresowy przedstawia pewną niewymierność kwadratową, tzn. niewymierny pierwiastek równania kwadratowego o współczynnikach całkowitych. Każda niewymierność kwadratowa rozwija się na ułamek łańcuchowy arytmetyczny okresowy.*

Euler zauważył, że jeden z pierwiastków równania kwadratowego $x^2 - ax - b = 0$ jest równy

$$a + \frac{b\,|}{|\,a} + \frac{b\,|}{|\,a} + \frac{b\,|}{|\,a} + \ldots$$

Pierwsza część tego twierdzenia pochodzi od Eulera, druga, znacznie trudniejsza, od Lagrange'a.

Mało wiadomo o rozwinięciach na ułamki łańcuchowe liczb algebraicznych niewymiernych różnych od niewymierności kwadratowych. W szczególności zagadką jest, czy mianowniki takich rozwinięć mogą tworzyć ciągi ograniczone. Że mianowniki te nie mogą rosnąć zbyt szybko, wynika z następującego twierdzenia K. F. Rotha.

Twierdzenie 8. *Jeżeli P_k/Q_k jest k-tym reduktem rozwinięcia liczby algebraicznej niewymiernej na ułamek łańcuchowy arytmetyczny, to*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln Q_{k+1}}{\ln Q_k} = 1.$$

Znane są rozwinięcia na ułamki łańcuchowe niektórych ważnych liczb przestępnych, np. liczby e, podstawy logarytmów naturalnych. Zachodzi mianowicie wzór Eulera

$$e = 2 + \frac{1\,|}{|\,1} + \frac{1\,|}{|\,2} + \frac{1\,|}{|\,1} + \frac{1\,|}{|\,1} + \frac{1\,|}{|\,4} + \frac{1\,|}{|\,1} + \ldots + \frac{1\,|}{|\,1} + \frac{1\,|}{|\,2k} + \frac{1\,|}{|\,1} + \ldots.$$

Odpowiednie rozwinięcie liczby π nie jest znane, zachodzi natomiast wzór Brounckera

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1\,|}{|\,1} + \frac{1^2\,|}{|\,2} + \frac{3^2\,|}{|\,2} + \ldots + \frac{(2k+1)^2\,|}{|\,2} + \ldots.$$

Na ostatnim Międzynarodowym Kongresie Matematyków, który odbył się w Helsinkach w sierpniu 1978 r., wielką sensacją wzbudziło znalezione przez R. Apéry'ego rozwinięcie liczby

Suma szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ jest słynną funkcją ζ (dzeta) Riemanna, mającą duże znaczenie w teorii liczb i jeszcze kilku gałęziach matematyki

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ na ułamek łańcuchowy niearytmetyczny:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{6|}{|5} - \frac{1^6|}{|117} - \ldots - \frac{(n-1)^6|}{|34n^3-51n^2+27n-5} - \ldots.$$

Z rozwinięcia tego wynika, że liczba $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ jest niewymierna. Dla liczby $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ fakt taki znany był już od 1770 r., na wynik Apery'ego czekano zatem ponad 200 lat.
Dowody większości podanych tu twierdzeń Czytelnik znajdzie w książkach W. Sierpińskiego ,,Działania nieskończone", rozdział XI i ,,Teoria liczb", rozdział XII, a wiele innych ciekawych informacji w książeczce *А. Хинчин, Цепные дроби.*

Zastosowania ułamków łańcuchowych

Podamy tylko kilka przykładów tych zastosowań. Pełniejszą teorię może Czytelnik znaleźć w książkach: *A.J. Banarski ,,Równania nieoznaczone"*, *А.О. Гельфонд ,,Решение уравнений в целых числах"* i *W. Sierpiński ,,Działania nieskończone"*. Opisane przykłady pochodzą z tych książek.

1. Rozwiązywanie równań w liczbach całkowitych. Rozpatrzmy równanie $127x-52y+1 = 0$, które chcemy rozwiązać w liczbach całkowitych. Rozwijamy najpierw $\frac{127}{52}$ na ułamek łańcuchowy (np. metodą opisaną w artykule A. Schinzla):

$$\frac{127}{52} = 2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5}}}}$$

W tak otrzymanym wyrażeniu skreślamy ostatni ułamek, tj. $\frac{1}{5}$, i obliczamy wartość otrzymanego nowego ułamka łańcuchowego (bezpośrednio lub korzystając z twierdzenia 1 artykułu A. Schinzla): $2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1}}} = 2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4}} = 2+\cfrac{1}{\cfrac{9}{4}} = \frac{22}{9}$.

Obliczamy następnie różnicę $\frac{127}{52}-\frac{22}{9} = -\frac{1}{52\cdot 9}$.
Po sprowadzeniu do wspólnego mianownika otrzymujemy

$$127\cdot 9-52\cdot 22 = -1,$$

a zatem otrzymaliśmy rozwiązanie równania: $x = 9$, $y = 22$. Wiadomo, że gdy dane jest jedno całkowitoliczbowe (x_0, y_0) rozwiązanie równania $Ax+By+C = 0$, gdzie A i B są względnie pierwsze, to wszystkie pozostałe wyrażają się wzorami $x = x_0-Bt$, $y = y_0+At$, gdzie t jest dowolną liczbą całkowitą.

2. Rozpatrzmy równanie $25x+18y = 970$. Jak poprzednio, zacznijmy od rozwinięcia $\frac{18}{25}$ na ułamek łańcuchowy:
$$\frac{18}{25} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}}}$$

Odrzucamy $\frac{1}{3}$ i obliczamy: $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{2}{5}} = \frac{5}{7}$

Ponieważ zaś $\frac{18}{25}-\frac{5}{7} = \frac{1}{25\cdot 7}$, więc (mnożąc przez wspólny mianownik) otrzymujemy