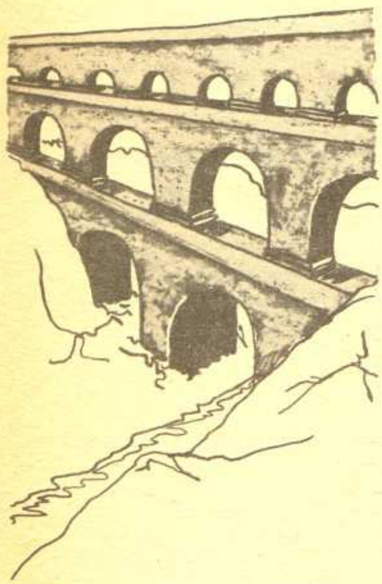
O pewnym paradoksie hydraulicznym

Mgr inż. Jacek CHLIPALSKI

Przypomnijmy na wstępie, że hydraulika zajmuje się przepływem cieczy odbywającym się na skutek działania siły ciężkości lub różnych urządzeń (zwykle pomp). Przepływy mogą dotyczyć przewodów otwartych (rzeki, kanały, rowy), jak też i zamkniętych (rury). W 1775 roku de Chézy odkrył, że szybkość przepływu cieczy jest w przybliżeniu proporcjonalna do pierwiastka kwadratowego tzw. promienia hydraulicznego. W końcu XIX wieku okazało się, że zależność ta jest bardziej skomplikowana i dokładniej jest

$$v = k\sqrt{J}\cdot\sqrt[3]{R_h^2}, \quad \text{gdzie}$$



v — średnia szybkość cieczy w danym przewodzie,
k — współczynnik proporcjonalności, zależny od rodzaju przewodu, jego chropowatości, stopnia zabrudzenia a także kształtu itp.,
J — spadek hydrauliczny; gdy przepływ odbywa się wyłącznie pod działaniem siły ciężkości, można go określić jako nachylenie przewodu do poziomu;
R_h — promień hydrauliczny, równy $\frac{F}{Ob}$, gdzie F jest polem przekroju poprzecznego, przez który płynie ciecz, a Ob jest długością tej części przekroju poprzecznego, która styka się z cieczą. Wielkość Ob nazywana jest obwodem zwilżonym.

Ten zmodyfikowany wzór de Chézy stosowany jest powszechnie w hydraulice zarówno do obliczeń przepływów w przewodach otwartych jak i zamkniętych.

Nasze rozważania dotyczyć będą jednego przewodu, zatem wielkości k i J będą niezmienne, przyjmiemy zatem, że są równe 1. Założenie to usprawiedliwia zresztą praktyka hydrauliczna.

Wzór de Chézy przyjmuje zatem postać $v = R_h^{\frac{2}{3}}$.

Jeżeli v jest średnią szybkością cieczy w przewodzie, to objętość cieczy przepływającej przez ten przewód w jednostce czasu jest równa

$$q = v\cdot F,$$

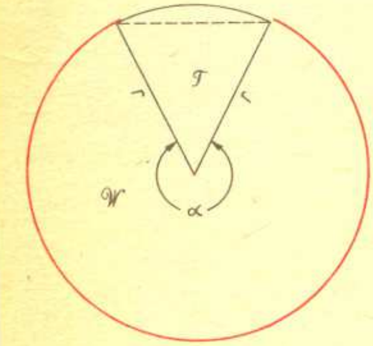
gdzie F jest polem przekroju poprzecznego tej części przewodu, przez którą płynie ciecz.

Wyobraźmy sobie teraz, że ciecz płynie rurą o przekroju kołowym (rys. 1). Oznaczmy przez h wysokość warstwy wody w rurze. Zapytajmy, przy jakim h wielkość q jest największa, tzn. przy jakim napełnieniu rury odpływowej basen opróżnia się najszybciej? Wydaje się, że aby przez rurę w jednostce czasu płynęło jak najwięcej wody, rura powinna być całkowicie napełniona (bo i po co marnować kawałek rury?). A właśnie to nieprawda! Obliczmy bowiem wielkości F i Ob, za pomocą których wyraża się promień hydrauliczny (rys. 1):

$$F = \text{pole wycinka } \mathscr{W} + \text{pole trójkąta } \mathscr{T} = r^2\cdot\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\cdot r^2\cdot\sin(360^\circ-\alpha) = \frac{1}{2}r^2(\alpha-\sin\alpha);$$

$Ob = 2\pi r\cdot\frac{\alpha}{2\pi} = r\alpha$, zatem promień hydrauliczny jest równy

$$R_h = \frac{1}{2}r\left(1-\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right).$$



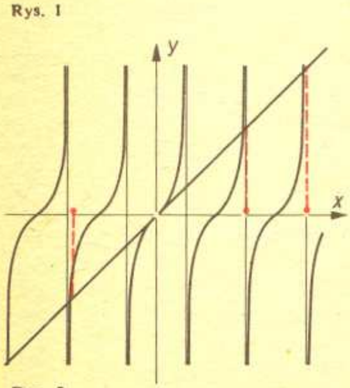
Rys. 1

Widzimy, że średnia szybkość liniowa przepływu i szybkość „objętościowa" wyrażają się wzorami

$$v = \left[\frac{1}{2}r\left(1-\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)\right]^{2/3};$$

$$q = v\cdot F = \frac{1}{2\sqrt[3]{4}}\cdot r^{8/3}\cdot\alpha\cdot\left(1-\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^{5/3}$$

Aby obliczyć np. maksimum funkcji v, możemy ją zróżniczkować i przyrównać pierwszą pochodną do zera (zwracamy uwagę, że α jest kątem większym niż π, a więc funkcja $v(\alpha)$ jest różniczkowalna). Funkcja v ma oczywiście maksimum w tym samym punkcie, w którym ma maksimum funkcja $g(\alpha) = 1-\frac{\sin\alpha}{\alpha}$. Zwykłą metodą (przyrównanie pierwszej pochodnej do zera + ew. dyskusja) można się przekonać, że w przedziale $(\pi, 2\pi)$ maksimum będzie w punkcie α takim, że $\alpha = \operatorname{tg}\alpha$. Równanie $\alpha = \operatorname{tg}\alpha$ możemy rozwiązać tylko w sposób przybliżony (rys. 2), otrzymamy $\alpha = 257°27'15''$. Odpowiada to wartości $h = 0{,}81\ d$. Znacznie gorzej jest z maksimum funkcji q. Przyrównanie do zera pochodnej prowadzi do równania



Rys. 2

$$2\sin\alpha-5\alpha\cos\alpha+3\alpha = 0,$$

które trudno rozwiązać nawet w przybliżeniu. Możemy jednak łatwo przekonać się, że maksimum znajduje się gdzieś pomiędzy π i 2π (czyli gdy przewód nie jest całkowicie napełniony).

Mamy bowiem (opuszczając nieistotny współczynnik)

$$q(\pi) = \pi\cdot\left(1-\frac{\sin\pi}{\pi}\right)^{5/3} = \pi, \quad q(2\pi) = 2\pi,$$

z drugiej strony, z uwagi na oszacowanie $21\sqrt{3} > 10\pi$ i $\frac{5}{3} > \frac{3}{2}$ otrzymujemy przy $\alpha = \frac{10}{6}\pi$, tj. 300°:

$$q\left(\frac{10}{6}\pi\right) = \frac{10}{6}\pi\left(1 - \frac{\sin\frac{10}{6}\pi}{\frac{10}{6}\pi}\right)^{5/3} = \frac{10}{6}\pi\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{1}{\pi}\right)^{5/3} =$$

$$= \frac{10}{6}\pi\left(1 + \frac{3\sqrt{3}}{10\pi}\right)^{5/3} > \frac{10}{6}\pi\left(1 + \frac{1}{7}\right)^{5/3} > \frac{10}{6}\pi\left(1 + \frac{1}{7}\right)^{3/2} > 2\pi,$$

a zatem maksimum funkcji znajduje się rzeczywiście gdzieś we wnętrzu przedziału $(\pi, 2\pi)$.
W praktyce hydraulicznej korzysta się z tablic funkcji v i q i z nich można się dowiedzieć, że q_{max} otrzymujemy dla $\alpha \approx 302°$ czyli $h = 0{,}94\ d$ (gdzie d jest średnicą przewodu).
Warto zauważyć, że dla przewodów o przekroju prostokątnym (o dwóch ścianach poziomych) największy przepływ będzie osiągany przy całkowitym napełnieniu. Można to łatwo obliczyć.

Rozwiązanie zadania F 65.

(a) Przyjmując uproszczony model, w którym średnio $\frac{1}{\alpha}$ czasteczek gazu porusza się równolegle do v z tym samym zwrotem i $\frac{1}{\alpha}$ ze zwrotem przeciwnym, stwierdzamy, że ich pędy zmienią się o

$$\Delta p_P = 2\ m\,(w+v)$$

dla cząsteczki padającej z przodu poruszającego się przedmiotu i o

$$\Delta p_T = -2m\,(w-v)$$

dla padającej z tyłu (m — masa cząsteczki gazu).
Liczba cząsteczek uderzających z przodu i z tyłu w przedziale czasu Δt wyniesie odpowiednio

$$N_P = \frac{q}{\alpha m}\cdot S\cdot(w+v)\cdot\Delta t, \quad N_T = \frac{q}{\alpha m}\cdot S\cdot(w-v)\cdot\Delta t,$$

gdzie q — gęstość gazu, S — powierzchnia przedmiotu.
Zmiana pędu przedmiotu (suma pędów przekazanych przez uderzające cząsteczki) wyniesie

$$\Delta p = -\Delta p_P N_P - \Delta p_T N_T,$$

a ponieważ siła oporu F to stosunek zmiany pędu do czasu, więc

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = -2m\cdot\frac{q}{\alpha m}\cdot S\cdot\left((w+v)^2-(w-v)^2\right) = -\frac{8}{\alpha}\,q\cdot S\cdot w\cdot v.$$

(b) Przyjmując zgodnie z (a), że siła oporu F jest proporcjonalna do prędkości v

$$F = -kv$$

otrzymujemy równanie ruchu (zakładamy, że spadek jest pionowy)

$$m\cdot\frac{dv}{dt} = -m\cdot g - k\cdot v, \tag{1}$$

gdzie m — masa przedmiotu, g — przyspieszenie grawitacyjne.
Osiągnąwszy prędkość $v_g = -\frac{mg}{k}$ ciało poruszać się będzie ruchem jednostajnym, bo w myśl (1) będzie $\frac{dv}{dt} = 0$.
Dla swobodnego spadku ($v(0) = 0$) prędkość taka jest jednak nie do uzyskania. Całkując bowiem równanie (1) otrzymujemy

$$-\frac{m}{k}\int_0^v \frac{dv}{v + \frac{m}{k}\cdot g} = \int_0^t dt, \quad \text{czyli} \quad -\frac{m}{k}\ln\left(\frac{v + \frac{m}{k}g}{\frac{m}{k}g}\right) = t, \quad \text{skąd}$$

$$v = \frac{mg}{k}\left(e^{-\frac{k}{m}t} - 1\right).$$

(c) Załóżmy, że orbita statku jest w przybliżeniu kołowa o promieniu r. Wówczas energia całkowita statku wyniesie

$$E = -G\frac{m\cdot M}{2r},$$

gdzie m — masa statku, M — masa Ziemi, G — stała grawitacji.
Straty energii są proporcjonalne do oporu i do prędkości, a więc, posługując się wynikiem (a), mamy

$$\frac{dE}{dt} = -kv^2.$$

Stąd

$$-kv^2 = \frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dr}\cdot\frac{dr}{dt} = G\,\frac{m\cdot M}{2r^2}\cdot\frac{dr}{dt}. \tag{2}$$

Obliczając siłę odśrodkową otrzymujemy $\frac{v^2}{r} = G\cdot\frac{M}{r^2}$, co wraz z (2) daje $-k\frac{GM}{r} = \frac{GmM}{2r^2}\cdot\frac{dr}{dt}$,

czyli

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{2k}{m}\cdot r.$$

Siły oporu proporcjonalne do prędkości mogą mieć inne przyczyny (np. lepkość) niż oddziaływanie szybkich w stosunku do rozpatrywanego ruchu cząsteczek bardzo rozrzedzonego gazu. W gazie natomiast nie spełniającym takich założeń (np. powietrze blisko powierzchni Ziemi) opór nie jest proporcjonalny do prędkości (już raczej do jej kwadratu) i aby go wyznaczyć, należy uciec się do równań hydrodynamiki, w których uwzględnia się również kształt poruszającego się przedmiotu.

Nie do wiary

Liczba 1234567891234567891234567891234567891 jest pierwsza, podobnie zresztą jak 23456789 i 1234567891.
To są przykłady liczb pierwszych, w których cyfry występują w tzw. rosnącym porządku cyklicznym (tzn. po kolei, tyle że po 9 może być 0 albo 1). Takich liczb znamy tylko 19, nie licząc jednocyfrowych.
Nie wiadomo dlaczego, ale trudniej trafić na liczby pierwsze z malejącym porządkiem cyklicznym. Znamy ich tylko 4: 43, 109, 10987, i 76543; jeżeli uznamy, że 0 jest gorszą cyfrą niż inne (choć właściwie dlaczego? czyżby dlatego, że wynaleźli je Arabowie?), to mamy jeszcze 1987.

13 dzień miesiąca przypada w piątek częściej niż w jakikolwiek inny dzień tygodnia i tak będzie aż do końca przyszłego stulecia!

*

Fibonacci na drodze: 8 km = 5 mil angielskich (w przybliżeniu, niestety), 13 km = 8 mil, 21 km = 13 mil, itd. Dopiero 89 mil jest znacznie bliższe 143 km niż 144 km.