z drugiej strony, z uwagi na oszacowanie $21\sqrt{3} > 10\pi$ i $\frac{5}{3} > \frac{3}{2}$ otrzymujemy przy $\alpha = \frac{10}{6}\pi$, tj. 300°:

$$q\left(\frac{10}{6}\pi\right) = \frac{10}{6}\pi\left(1-\frac{\sin\frac{10}{6}\pi}{\frac{10}{6}\pi}\right)^{5/3} = \frac{10}{6}\pi\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{1}{\pi}\right)^{5/3} =$$

$$= \frac{10}{6}\pi\left(1+\frac{3\sqrt{3}}{10\pi}\right)^{5/3} > \frac{10}{6}\pi\left(1+\frac{1}{7}\right)^{5/3} > \frac{10}{6}\pi\left(1+\frac{1}{7}\right)^{3/2} > 2\pi,$$

a zatem maksimum funkcji znajduje się rzeczywiście gdzieś we wnętrzu przedziału $(\pi, 2\pi)$.
W praktyce hydraulicznej korzysta się z tablic funkcji v i q i z nich można się dowiedzieć, że q_{max} otrzymujemy dla $\alpha \approx 302°$ czyli $h = 0{,}94\, d$ (gdzie d jest średnicą przewodu).
Warto zauważyć, że dla przewodów o przekroju prostokątnym (o dwóch ścianach poziomych) największy przepływ będzie osiągany przy całkowitym napełnieniu. Można to łatwo obliczyć.

Rozwiązanie zadania F 65.

(a) Przyjmując uproszczony model, w którym średnio $\frac{1}{\alpha}$ czasteczek gazu porusza się równolegle do v z tym samym zwrotem i $\frac{1}{\alpha}$ ze zwrotem przeciwnym, stwierdzamy, że ich pędy zmienią się o

$$\Delta p_P = 2\, m\,(w+v)$$

dla cząsteczki padającej z przodu poruszającego się przedmiotu i o

$$\Delta p_T = -2m\,(w-v)$$

dla padającej z tyłu (m — masa cząsteczki gazu).
Liczba cząsteczek uderzających z przodu i z tyłu w przedziale czasu Δt wyniesie odpowiednio

$$N_P = \frac{q}{\alpha m}\cdot S\cdot(w+v)\cdot\Delta t,\quad N_T = \frac{q}{\alpha m}\cdot S\cdot(w-v)\cdot\Delta t,$$

gdzie q — gęstość gazu, S — powierzchnia przedmiotu.
Zmiana pędu przedmiotu (suma pędów przekazanych przez uderzające cząsteczki) wyniesie

$$\Delta p = -\Delta p_P N_P - \Delta p_T N_T,$$

a ponieważ siła oporu F to stosunek zmiany pędu do czasu, więc

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = -2m\cdot\frac{q}{\alpha m}\cdot S\cdot\left((w+v)^2-(w-v)^2\right) = -\frac{8}{\alpha}\, q\cdot S\cdot w\cdot v.$$

(b) Przyjmując zgodnie z (*a*), że siła oporu F jest proporcjonalna do prędkości v

$$F = -kv$$

otrzymujemy równanie ruchu (zakładamy, że spadek jest pionowy)

$$m\cdot\frac{dv}{dt} = -m\cdot g - k\cdot v, \tag{1}$$

gdzie m — masa przedmiotu, g — przyspieszenie grawitacyjne.
Osiągnąwszy prędkość $v_g = -\frac{mg}{k}$ ciało poruszać się będzie ruchem jednostajnym, bo w myśl (1) będzie $\frac{dv}{dt} = 0$.
Dla swobodnego spadku ($v(0) = 0$) prędkość taka jest jednak nie do uzyskania. Całkując bowiem równanie (1) otrzymujemy

$$-\frac{m}{k}\int_0^v \frac{dv}{v+\frac{m}{k}\cdot g} = \int_0^t dt, \quad \text{czyli} \quad -\frac{m}{k}\, ln\left(\frac{v+\frac{m}{k}g}{\frac{m}{k}g}\right) = t, \quad \text{skąd}$$

$$v = \frac{mg}{k}\left(e^{-\frac{k}{m}t}-1\right).$$

(c) Załóżmy, że orbita statku jest w przybliżeniu kołowa o promieniu r. Wówczas energia całkowita statku wyniesie

$$E = -G\frac{m\cdot M}{2r},$$

gdzie m — masa statku, M — masa Ziemi, G — stała grawitacji.
Straty energii są proporcjonalne do oporu i do prędkości, a więc, posługując się wynikiem (a), mamy

$$\frac{dE}{dt} = -kv^2.$$

Stąd

$$-kv^2 = \frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dr}\cdot\frac{dr}{dt} = G\,\frac{m\cdot M}{2r^2}\cdot\frac{dr}{dt}. \tag{2}$$

Obliczając siłę odśrodkową otrzymujemy $\frac{v^2}{r} = G\cdot\frac{M}{r^2}$, co wraz z (2) daje $-k\frac{GM}{r} = \frac{GmM}{2r^2}\cdot\frac{dr}{dt}$,

czyli $$\frac{dr}{dt} = -\frac{2k}{m}\cdot r.$$

Siły oporu proporcjonalne do prędkości mogą mieć inne przyczyny (np. lepkość) niż oddziaływanie szybkich w stosunku do rozpatrywanego ruchu cząsteczek bardzo rozrzedzonego gazu. W gazie natomiast nie spełniającym takich założeń (np. powietrze blisko powierzchni Ziemi) opór nie jest proporcjonalny do prędkości (już raczej do jej kwadratu) i aby go wyznaczyć, należy uciec się do równań hydrodynamiki, w których uwzględnia się również kształt poruszającego się przedmiotu.

Nie do wiary

Liczba 1234567891234567891234567891234567891 jest pierwsza, podobnie zresztą jak 23456789 i 1234567891.
To są przykłady liczb pierwszych, w których cyfry występują w tzw. rosnącym porządku cyklicznym (tzn. po kolei, tyle że po 9 może być 0 albo 1). Takich liczb znamy tylko 19, nie licząc jednocyfrowych.
Nie wiadomo dlaczego, ale trudniej trafić na liczby pierwsze z malejącym porządkiem cyklicznym. Znamy ich tylko 4: 43, 109, 10987, i 76543; jeżeli uznamy, że 0 jest gorszą cyfrą niż inne (choć właściwie dlaczego? czyżby dlatego, że wynaleźli je Arabowie?), to mamy jeszcze 1987.

13 dzień miesiąca przypada w piątek częściej niż w jakikolwiek inny dzień tygodnia i tak będzie aż do końca przyszłego stulecia!

*

Fibonacci na drodze: 8 km = 5 mil angielskich (w przybliżeniu, niestety), 13 km = 8 mil, 21 km = 13 mil, itd. Dopiero 89 mil jest znacznie bliższe 143 km niż 144 km.