O początkach metody aksjomatycznej

Dr Jan WASZKIEWICZ

Każdy, kto dostatecznie długo styka się z matematyką, oswaja się ze stosowaną w niej metodą dedukcyjną. Polega ona na tym, że wszystkie wprowadzane pojęcia opatruje się precyzyjnymi określeniami, zaś wszystkie wypowiadane twierdzenia są ściśle dowodzone.
No, może w tym szkicowym obrazie nieco przesadziliśmy. Każdy uczeń potrafi podać przykłady poznanych na lekcjach matematyki pojęć, których definicji mu nie podano, potrafi też wskazać twierdzenia, których dowodu nie przedstawił mu ani nauczyciel, ani podręcznik matematyki. Dziać się tak może z kilku powodów. Czasem przytaczane twierdzenie ma dowód tak łatwy, że można śmiało przyjąć, iż każdy zainteresowany tym uczeń potrafi go przeprowadzić samodzielnie. Czasem jest wręcz przeciwnie — dowód twierdzenia jest tak złożony, że nie ma sensu przytaczać go w całości. Można wówczas podać coś, co nazywa się szkicem dowodu lub w ogóle poprzestać na samym wysłowieniu twierdzenia. Może też zdarzyć się, że przeprowadzenie dowodu wymaga wprowadzenia dodatkowych pojęć i udowodnienia pewnych twierdzeń pomocniczych, które choć dostępne dla ucznia (czy czytelnika) zbytnio wydłużyłyby wykład. W każdym z tych przypadków twierdzenie można przyjąć za prawdziwe: ma ono bowiem dowód, choć dowód ten nie został przedstawiony. Podobnie rzecz przedstawia się z definicjami pojęć...
Jednakże, oprócz takich uchybień przedstawionej zasadzie, są też znacznie istotniejsze. Każda definicja jest odpowiedzią na pytanie „a cóż to takiego?", które może, a nawet wręcz powinien, zadać nauczycielowi (czy też autorowi pracy matematycznej) słuchacz (czy też czytelnik) z chwilą, gdy usłyszy nazwę nowego pojęcia. Jednakże w odpowiedzi na to pytanie pojawić się muszą nazwy pojęć, które powinny też być zdefiniowane. Można więc powtórzyć to samo pytanie — tym razem odnosząc je do pojęć, za pomocą których wyjaśniano pojęcie poprzednie. Proceder taki można kontynuować w nieskończoność. Zarówno w takiej rozmowie, jak i w każdej teorii matematycznej muszą pojawić się pojęcia, których definicji nie podaje się.
Na przykład, pojęcie okręgu definiuje się w matematyce jako „zbiór punktów płaszczyzny równooddalonych od ustalonego punktu". Na pytanie „a co to jest zbiór?" odpowiedzi już się nie usłyszy — jest to pojęcie, które przyjmuje się bez definicji, co najwyżej ułatwiając kilkoma przykładami zrozumienie go temu, kto słyszy o nim po raz pierwszy.
Podobnie przedstawia się sprawa z twierdzeniami. Dowodząc twierdzeń, odpowiadamy na pytanie „a dlaczego?", które powinno paść z ust słuchacza (czy czytelnika). Ten łańcuszek też trzeba przerwać w jakimś miejscu. W każdej teorii matematycznej, bez względu na to jak precyzyjnie jest ona zbudowana, muszą pojawić się — te najbardziej podstawowe — pojęcia, których się nie definiuje, i twierdzenia przyjmowane bez dowodu.
Toteż maksymalnie możemy zbliżyć się do ideału precyzji matematycznej, sformułowanego na wstępie, w następujący sposób. Przystępując do budowania (czy też przekazywania) teorii sporządzamy listę tych pojęć — tzw. pojęć pierwotnych, które przyjmujemy bez definicji, oraz twierdzeń przyjmowanych bez dowodu — tzw. aksjomatów. Wszystkie inne pojęcia, które pojawiać się będą w dalszym ciągu — będą już dokładnie określone, wszystkie pozostałe twierdzenia będą miały porządne dowody. Tak zbudowaną teorię nazywa się teorią aksjomatyczną.
Można więc przyjąć, że teorie aksjomatyczne, jako najbliższe ideału matematycznej ścisłości, są dla matematyki czymś naturalnym. Powinny też być czymś na jej gruncie pospolitym. Tak jest na pewno w tej chwili. Operowanie teoriami aksjomatycznymi jest czymś w matematyce codziennym, a prawie wszystkie teorie, nawet jeśli są uprawiane nie w sposób aksjomatyczny, dają się odtworzyć w pewnej uniwersalnej teorii zaksjomatyzowanej (teorii mnogości).
Nie zawsze jednak tak było. Jeśli dzieje matematyki wyprowadzać — jak to się obecnie czyni — z odległej starożytności (najstarsze źródła do dziejów matematyki — pewne mezopotamskie tabliczki klinowe — pochodzą z około 2000 r. p.n.e.), to okaże się, że wynalazek teorii aksjomatycznych jest względnie nowy: pierwszy aksjomatyczny system geometrii datuje się na ok. 350 r. p.n.e., a następne teorie aksjomatyczne pojawiły się dopiero w wieku XIX n.e. (inne systemy geometrii, teoria liczb rzeczywistych, teoria liczb naturalnych). Przez przeszło 2000 lat, wszystkie teorie matematyczne — oprócz geometrii, nie były teoriami aksjomatycznymi! Nie oznacza to jednak, że w tym czasie nie stosowano metody dedukcyjnej. Uprawiano różne teorie matematyczne bez ustalania listy aksjomatów, opierając się często na intuicji — ale zawsze od pewnego poziomu począwszy, twierdzenia były dowodzone w możliwie ścisły sposób!
Jaka jest geneza metody aksjomatycznej? Postaramy się naszkicować odpowiedź na to pytanie w nadziei, że nie tylko pozwoli to zrozumieć istotę ważnego w dziejach matematyki faktu, ale również rzuci światło zarówno na samą metodę, jak i jej współczesne zastosowania.
Najstarszym znanym wykładem teorii aksjomatycznej są „Elementy" Euklidesa napisane przez niego około 300 r. p.n.e. Stanowiły one aksjomatyczny wykład całości wiedzy geometrycznej znanej w czasach Euklidesa, pomyślany prawdopodobnie jako podręcznik. Tę też funkcję pełniły „Elementy", lub ich niezbyt daleko idące przeróbki, jeszcze w XIX wieku. Bertrand Russel wspominał, że jeszcze w czasach jego młodości (około roku 1880) był to jedyny powszechnie

Zanurzyć w teorię mnogości nie można tzw. teorii kategorii, która operuje szerszym niż zbiór pojęciem „klasy". Na przykład zbiór wszystkich zbiorów nie istnieje, jednakże wszystkie zbiory tworzą klasę.

Rozwiązanie zadania F 63

Objętość zanurzonej części klocka nie ulegnie zmianie. W stanie równowagi bowiem siła wyporu równoważy ciężar klocka. W układzie związanym z windą rolę ciężaru klocka spełnia wielkość

$$V\varrho_k(g+a)$$

natomiast rolę siły wyporu — wielkość

$$V_{zanurz}\,\varrho_w(g+a).$$

Porównując te wielkości otrzymujemy

$$V_{zanurz} = V\,\frac{\varrho_k}{\varrho_w}$$

niezależnie od przyspieszenia windy a. Zachowanie klocka może ulec zmianie jedynie wtedy, gdy wartość a jest bliska $-g$. Wtedy bowiem zaczynają grać istotną rolę siły napięcia powierzchniowego i przylegania.

akceptowany podręcznik geometrii w Anglii. Tak długa aktualność podręcznika Euklidesa świadczy, że udało mu się stworzyć dzieło niemal doskonałe. Wprawdzie przy obecnych standardach ścisłości matematycznej poprawność jego musi budzić liczne wątpliwości i zastrzeżenia, nie zmienia to jednak faktu, że przez współczesnych jak i przez długie późniejsze stulecia było uważane za wzorzec matematycznej precyzji.

Jednakże doskonałość ta ma dla nas pewne ujemne skutki. „Elementy" wyparły bowiem z obiegu wszystkie poprzednie próby usystematyzowania wiedzy matematycznej, toteż jedynie z nazwiska znamy ich autorów. Pierwszym, zgodnie ze starożytnymi źródłami, był Hippokrates (V w. p.n.e.); uczeń Platona, Leon, swoje „Elementy" napisał około 375 r. p.n.e. Wykład geometrii spisał też najwybitniejszy geometra tamtej epoki, Eudoksos... Fakt, że nie znamy dzieł tych w oryginałach, powoduje, że nie można prześledzić ewolucji metody aksjomatycznej od jej początku do niemal doskonałej postaci. Można wprawdzie, co czynią historycy matematyki, szukać w „Elementach" Euklidesa, poprzez subtelną analizę tekstu, śladów opracowań, na których opierał się pisząc swoje dzieło, jednakże jest to metoda dostarczająca wątłych i bardzo wątpliwych danych.

Powstaje przede wszystkim pytanie: czy poprzedzające euklidesowy podręczniki geometrii miały budowę aksjomatyczną? Może nie wszystkie, ale prawie na pewno niektóre z nich tak właśnie prowadziły swój wykład. O ile bowiem Platon, żyjący w latach 428—347 p.n.e., pisząc wiele o potrzebie uprawiania i nauczania geometrii nie mówi nic o metodzie aksjomatycznej, o tyle Arystoteles w swoich dziełach pisanych niedługo po śmierci Platona opisuje tę metodę jako coś dobrze i powszechnie znanego. Daty te pozwalają na zakreślenie ram czasowych całkowitej ewolucji metody aksjomatycznej. Od pierwszych prób jej zastosowania do powstania jej wzorca minęło niewiele ponad 50 lat... Tyle czasu potrzeba było na dokonanie ogromnej rewolucji w sposobie uprawiania matematyki i na powszechną akceptację jej wyników! Znowu rodzi się pytanie o przyczyny tak niezwykłego zjawiska.

Odpowiedzi na postawione pytania poszukamy idąc śladem historyka geometrii i komentatora Euklidesa — Proklosa. Stwierdził on, że „każdy podziwia „Elementy" dla porządku i wyboru twierdzeń, albowiem nie wszystko w nich umieścił, co mógł zgromadzić, lecz wszystko co wprowadza w pierwsze zasady geometrii". Po czym chwali Euklidesa za szeroki wachlarz stosowanych rozumowań i dodaje: „W dodatku używał on wszystkich metod dialektycznych..." Słownik wyrazów obcych wyjaśni nam w tym miejscu, że w starożytności dialektyka była to „sztuka dyskutowania, umiejętność dotarcia do prawdy przez ujawnienie sprzeczności w sądach przeciwnika" (W. Kopaliński).

A więc spór, dyskusja... Metoda dedukcyjna i jej szczególna aksjomatyczna postać byłaby więc jedynie wysubtelnieniem metod prowadzenia dyskusji? Przypomnijmy obraz, który przedstawiliśmy na początku: autora pracy matematycznej czy też podręcznika dyskutującego z czytelnikiem, zadającym bez przerwy pytanie „dlaczego?", a czasem sprzeciwiającego się komunikowanemu stwierdzeniu. Tak więc metoda stosowana w matematyce nie tylko wywodziłaby się z dyskusji, ale nigdy nie przestawała być samą dyskusją. Tyle, że zapisany zawsze jest tylko jeden głos, autora. Rolę drugiego dyskutanta powinniśmy odgrywać sami...

Wyprowadzenie z dialektyki (czy też po prostu — sztuki dyskutowania) metody dedukcyjnej pozwala wytłumaczyć kilka jej osobliwości. Weźmy dla przykładu tzw. zasadę wyłączonego środka, która stwierdza, że spośród dwóch zdań — danego zdania „*p*" i jego zaprzeczenia „nie *p*" — dokładnie jedno musi być prawdziwe. Zasada ta, ustawicznie stosowana w rozumowaniach matematycznych i niemal powszechnie zaakceptowana przez matematyków, budzi poważne zastrzeżenia logików i filozofów. W języku potocznym, jak również w naukach innych niż matematyka, można podać przykłady zdań, które przeczą zasadności tego prawa. Skąd więc bierze się jego uznanie przez matematyków?

Łatwo można zauważyć, że zasada ta wynika z samych zasad gry, jaką była (a i bywa czasami) dyskusja. Przypuśćmy bowiem, że dwie osoby postanowiły przedyskutować jakieś zagadnienie. W greckiej tradycji dyskusja taka z reguły miała narzucony nie tylko temat, ale i tezę, którą podejmował się udowodnić inicjator sporu. Dalej — również reguły gry kazały, by każde zdanie wypowiadane przez dyskutanta zyskiwało bądź akceptację przeciwnika, bądź też żądanie dalszych wyjaśnień (połączone z domniemaniem fałszywości wyrażonego sądu). Jeśli zaś dyskutant nie potwierdzałby akceptacji sądu przeciwnika, ani też go nie kwestionował, oznaczałoby to po prostu brak zainteresowania kwestią. Spór stawałby się niemożliwy.

I na zakończenie jeszcze jeden przykład — dowód nie wprost. Przypuśćmy, że w trakcie sporu chcemy przekonać przeciwnika do własnego zdania, on zaś broni zdania przeciwnego. Można wówczas użyć następującego wybiegu. Zamiast dowodzić, że racja jest po naszej stronie, wykazać, że nasz przeciwnik nie ma racji. (Zauważmy, że nie zawsze musi to oznaczać to samo, ale reguły dyskusji dopuszczały takie postępowanie). Tak więc, aby obalić sąd przeciwnika, możemy przyznać mu rację po to tylko, by pokazać do jak absurdalnych wniosków prowadzi jego stanowisko. Tak też postępuje się przy dowodzie nie wprost twierdzenia matematycznego. Toteż każdemu czytelnikowi takiego dowodu, który ma kłopoty ze zrozumieniem go, lub choćby tylko z zanegowaniem dowodzonego twierdzenia, radzimy, by wyobraził sobie tę sytuację w bardziej dramatycznej postaci: sporu dwóch dyskutantów. Jeszcze lepiej, niech popróbuje odegrać rolę przeciwnika autora dowodu. To pomaga...

Powodem tego jest wieloznaczność słów, nieprecyzyjność terminów języka potocznego, pełnego przenośni, porównań, gry słów i ukrytych znaczeń. Człowiek, który nie jest głupcem, nie zawsze jest „niegłupi", z kolei każdy chyba wolałby być „głupi" niż „głupawy".

To też z powodu zamierzonego braku precyzji: czy wirus jest organizmem żywym?, czy dawniej było lepiej, czy gorzej?, czy elektron jest falą?

Jeżeli nasze zdanie jest rzeczywiście zaprzeczeniem zdania przeciwnika, taka sytuacja nie może się zdarzyć. Tyle, że czasami trudno jest zdemaskować taką demagogiczną argumentację ... „a zatem widzimy, że zabójca nie mógł mieć białego kapelusza. Oskarżony miał czarny kapelusz, a zatem to on zabił "