mała delta

Rys. 1

Nurek Kartezjusza

Opisane poniżej doświadczenie wymyślił Kartezjusz, wybitny francuski fizyk, matematyk i filozof, który żył w pierwszej połowie XVII wieku. Można je przeprowadzić posługując się bardzo prostymi środkami. Potrzebne są:

1. Wypisany plastikowy wkład od długopisu.
2. Świeca, zapałki.
3. Plastelina.
4. Słoik od dżemu z nakrętką „twist".
5. Duży garnek.
6. Woda, najlepiej przegotowana i ostudzona.

Doświadczenie wykonujemy następująco:

1. Rozciągamy nad płomieniem świecy wkład od długopisu (rys. 1), aby uzyskać szczelnie zatopioną na końcu rurkę o długości ok. 3 cm.

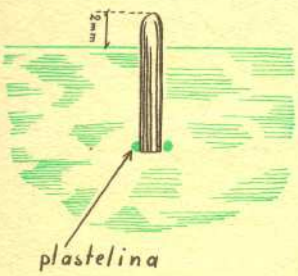
2. Obciążamy rurkę na otwartym końcu plasteliną tak, aby pływała w wodzie pionowo. Ponad powierzchnią powinien wystawać koniec na ok. 2 mm (rys. 2).

3. Umieszczamy w dużym garnku wypełnionym wodą słoik i nakrętkę.

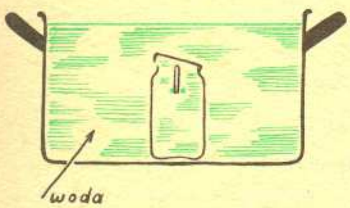
4. Do słoika wsuwamy pływak; słoik przykrywamy z góry nakrętką i szczelnie zakręcamy pod wodą (rys. 3). Trzeba uważać, żeby do słoika nie dostało się powietrze.

5. Słoik wyjmujemy z wody i osuszamy szmatką.

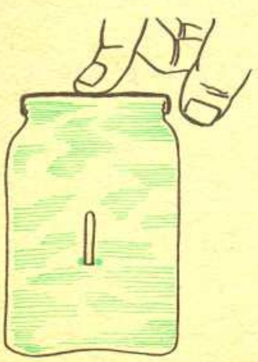
6. Przyciskamy silnie od góry ręką powierzchnię nakrętki (rys. 4). Przy odpowiednim nacisku pływak powinien opaść na dno. Po usunięciu ręki — wypłynie do góry. Czy potraficie wyjaśnić, dlaczego tak się dzieje?



Rys. 2



Rys. 3



s. 4

Zgadywanki

Jedną z rozrywek matematycznych XVII i XVIII wieku było odgadywanie pomyślanej liczby — oparte na prostych, a złośliwie „zagmatwanych" własnościach liczb i działań. Dziś moglibyśmy opracować np. taką zgadywankę: „pomyśl dowolną funkcję kwadratową (to znaczy funkcję postaci ax^2+bx+c) i powiedz mi, jakie wartości przyjmuje ona dla 0, 1 oraz 2, a natychmiast powiem ci, jaka to funkcja".

Odgadnienie jest bardzo proste. Przypuśćmy, że podano ci liczby -5, 1, 9. Napisz (albo oblicz w pamięci) różnice między tymi liczbami, a potem różnicę różnic. Powstanie taka tabelka

$$\begin{array}{ccccc} -5 & & 1 & & 9 \\ & 6 & & 8 & \\ & & 2 & & \end{array}$$

Współczynnik przy x^2 pomyślanej funkcji jest równy połowie najniżej stojącej liczby. Współczynnik przy x jest równy pierwszej liczbie środkowego wiersza, zmniejszonej o połowę liczby dolnej. Wyraz wolny pomyślanej funkcji jest pierwszą liczbą górnego wiersza. W naszym przykładzie obliczymy od razu, że kolega pomyślał o funkcji x^2+5x-5.

Takie obliczanki mają wiele wspólnego z ... całkowaniem i mają zastosowanie przy rozwiązywaniu poważniejszych problemów. Weźmy funkcję $x \to x^4-3x^3+ +7x^2-x+12$. Obliczmy jej wartości w punktach 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, następnie różnice tych wartości, różnice różnic i tak dalej. Otrzymamy taką tabelę:

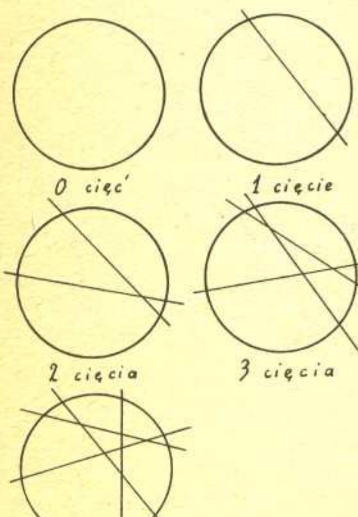
kolejne liczby	0	1	2	3	4	5	6	7
wartości	12	16	30	72	184	432	906	1720
I różnice	4	14	42	112	248	474	814	
II różnice	10	28	70	136	226	340		
III różnice	18	42	66	90	134			
IV różnice	24	24	24	24				

Można wykazać, że dla każdej funkcji czwartego stopnia czwarte różnice będą zawsze takie same. Odwrotnie, jeżeli funkcja wielomianowa ma wszystkie czwarte różnice takie same, to musi być czwartego stopnia. To samo dotyczy oczywiście i innych stopni. Na tym polega „zgadywanie" wzoru określającego funkcję, gdy dane są jej wartości:

Gdyby dano nam zagadkę: „jaka to funkcja, która dla 0 jest równa 12, dla 1—16, dla 2—30, dla 3—72, dla 4—184, dla 5—432, dla 6—906, dla 7—1720?" to rozwiązalibyśmy ją tak. Ustalilibyśmy, że jest ona najprawdopodobniej czwartego stopnia. Oznaczylibyśmy jej współczynniki powiedzmy przez a, b, c, d, e.

$$f(x) = ax^4+bx^3+cx^2+dx+12$$

(skąd wiemy, że $e = 12$?). Podstawiając za x kolejno 1, 2, 3, 4 otrzymalibyśmy układ czterech równań liniowych z czterema niewiadomymi; no i trzeba by było go rozwiązać.



Kroimy tort. Na ile (najwyżej) kawałków możemy pokroić go za pomocą n cięć? Układamy tabelę

	0	1	2	3	4	5	6
liczba kawałków	1	2	4	7	11	16	21
I różnice	1	2	3	4	5	6	
II różnice	1	1	1	1	1		

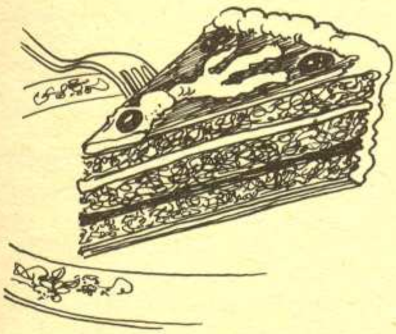
Jeżeli drugie różnice są stałe, funkcja najprawdopodobniej jest kwadratowa i metodą opisaną na początku możemy znaleźć, że jest to funkcja $\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n+1$.

Dlaczego tylko „najprawdopodobniej" a nie „na pewno"? Po pierwsze dlatego, że szukana funkcja nie musi przecież być wielomianem (bo i niby dlaczego?). Po drugie zaś, nie wiemy, czy naprawdę wszystkie drugie różnice są takie same (zbadaliśmy tylko pięć). Nasz wynik można tylko sformułować tak: najprostszą funkcją, przyjmującą w punktach 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 wartości 1, 2, 4, 7, 11, 16, 21 jest $\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n+1$. Ale są i inne. Czy wobec tego nasz wynik jest bezwartościowy? Nic podobnego. Wprawdzie wzór trzeba jeszcze udowodnić, ale już wiadomo, jaki.

Opisana metoda daje się zastosować i do zgadywania funkcji wyższych stopni. Do funkcji drugiego stopnia prowadzą zaś na przykład następujące zadania:

1) znaleźć największą liczbę obszarów, które mogą powstać przez przecięcie n kół na płaszczyźnie,

2) znaleźć największą liczbę obszarów powstałych przez przecięcie n elips na płaszczyźnie,



3) znaleźć największą liczbę obszarów trójkątnych utworzonych przez n przecinających się prostych.

4) znaleźć sumę liczb od 1 do n.

5) maksymalne liczby elektronów w poszczególnych powłokach atomu są kolejno równe (idąc od jądra atomowego) 2, 8, 18, 32, 50, ... Znaleźć funkcję określającą te liczby.

Małą Deltę opracowali: Jerzy GINTER i Michał SZUREK

Zadania

Redaguje dr Michał SZUREK

M 187. Dokąd dojdziemy, gdy będziemy stale szli na północny zachód?
Rozwiązanie na str. 8

M 188. Dana jest liczba 4444^{4444}. Obliczamy jej sumę cyfr, potem sumę cyfr powstałej liczby i jeszcze raz sumę cyfr. Co otrzymamy? (MOM 1975)
Rozwiązanie na str. 7

M 189. Ile najwięcej koni szachowych (skoczków) można ustawić na szachownicy tak, by się nie szachowały?
Rozwiązanie na str. 16

Redaguje dr Waldemar GORZKOWSKI

F 63. W windzie umieszczono naczynie z wodą, w którym pływa drewniany klocek. Następnie windę wprawiono w ruch jednostajnie przyspieszony do góry z przyspieszeniem równym a. Czy zanurzenie klocka w czasie ruchu windy będzie inne niż w czasie spoczynku? Jeżeli nie ulegnie ono zmianie, to dlaczego? Jeżeli zaś ulegnie zmianie, to jak?
Objętość klocka V, gęstość wody ϱ_w, gęstość klocka ϱ_k.
Rozwiązanie na str. 11