Co to jest teoria retraktów?

Prof. dr Karol BORSUK, członek rzeczywisty PAN

1. Pojęcie przestrzeni. Przez *przestrzeń* rozumiemy zbiór X, którego elementy nazywamy punktami i w którym określone jest pojęcie *granicy*, a więc ustalone jest kiedy punkt $x \in X$ jest granicą ciągu punktów $x_1, x_2, \ldots \in X$, czyli kiedy $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$. Pojęcie granicy ma przy tym spełniać pewne proste warunki, których dokładne formułowanie nie będzie nam potrzebne. Ograniczamy się tu bowiem do bardziej specjalnej (choć też bardzo ogólnej) klasy tzw. *przestrzeni metryzowalnych*, w których można wprowadzić pojęcie odległości, a więc określić funkcję przyporządkowującą każdej parze punktów $x, x' \in X$ liczbę $\varrho(x, x') \geqslant 0$ i spełniającą następujące warunki:

1° $\varrho(x, x') = \varrho(x', x)$,

2° $\varrho(x, x') = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $x = x'$,

3° dla każdej trójki punktów x, x', x'' jest $\varrho(x, x'') \leqslant \varrho(x, x') + \varrho(x', x'')$

oraz taką, że wyznaczone przez tę odległość pojęcie zbieżności jest identyczne z danym pojęciem zbieżności w X.

Nie każda przestrzeń jest metryzowalna, w dalszym jednak ciągu rozważać będziemy jedynie przestrzenie metryzowalne. Jasne jest, że każdy podzbiór przestrzeni jest przestrzenią.

Klasycznym przykładem przestrzeni jest tzw. *n-wymiarowa przestrzeń euklidesowa* E^n, której punktami są wszystkie układy liczb rzeczywistych $(x_1, x_2, \ldots \ldots, x_n)$, z odległością daną przez wzór

$$\varrho((x_1, \ldots, x_n), (x_1', \ldots, x_n')) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_k')^2}.$$

Naturalnym odpowiednikiem przestrzeni E^n jest nieskończenie-wymiarowa *przestrzeń Hilberta* E^∞, której punktami są wszystkie ciągi liczb rzeczywistych $(x_1, x_2, \ldots)$ takie, że $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty$ i gdzie odległość dana jest przez wzór

$$\varrho((x_1, x_2, \ldots), (x_1', x_2', \ldots)) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (x_k - x_k')^2}.$$

2. Najprostsze pojęcia topologiczne. Punkt a przestrzeni X nazywa się *punktem skupienia* zbioru $A \subset X$, jeżeli w A istnieją różne od a punkty $a_1, a_2, \ldots$ takie, że $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = a$. Zbiór A, który zawiera wszystkie swe punkty skupienia nazywa się *domkniętym*. Podzbiór B przestrzeni X nazywa się *otwartym*, jeżeli zbiór $X \setminus B$ jest domknięty.

Mówimy, że przestrzeń jest *spójna*, jeżeli nie jest sumą dwóch niepustych i rozłącznych zbiorów domkniętych. Przez przestrzeń *zwartą* rozumiemy przestrzeń, w której każdy zbiór nieskończony ma punkty skupienia. Przestrzenie (metryzowalne) zwarte nazywamy *kompaktami*, a kompakta spójne — *continuami*.

Łatwo okazać, że podzbiór Q^n (zwany *kostką n-wymiarową*) przestrzeni E^n złożony ze wszystkich takich punktów $(x_1, \ldots, x_n)$, że $0 \leqslant x_k \leqslant 1$ dla $k = 1, \ldots, n$ jest continuum i podobnie continuum jest też tzw. kostka podstawowa Hilberta, czyli zbiór Q^∞ złożony ze wszystkich takich punktów $(x_1, x_2, \ldots) \in E^\infty$, że $0 \leqslant x_k \leqslant \frac{1}{k}$ dla $k = 1, 2, \ldots$.

Funkcja $f: X \to Y$ przyporządkowująca każdemu punktowi x przestrzeni X punkt $f(x)$ przestrzeni Y nazywa się *przekształceniem X w Y* jeżeli jest *ciągła*, tj. jeżeli dla każdego ciągu punktów $x_1, x_2, \ldots \in X$ relacja $x = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$ pociąga za sobą relację $f(x) = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_k)$. Zbiór $f(X)$ wszystkich punktów postaci $f(x)$, gdzie $x \in X$, nazywa się obrazem przestrzeni X przy przekształceniu f.
W przypadku, gdy $f(X) = Y$, mówimy, że f przekształca X na Y.

Informacje historyczne i bibliograficzne. Pojęcie retrakcji, retraktu i retraktu absolutnego (czyli przestrzeni AR) zostało wprowadzone w roku 1931 w pracy: K. Borsuk, *Sur les rétractes*, *Fund. Math.* 17. Pojęcie absolutnego retraktu otoczeniowego (czyli przestrzeni ANR) zostało wprowadzone w pracy K. Borsuka, *Über eine Klasse von lokal zusammenhängenden Räumen*, *Fund. Math.* 19. Literatura poświęcona teorii retraktów i jej zastosowaniom jest dość obszerna (przeszło 200 prac). Systematyczny wykład tej teorii dany jest w książkach:
Sze Tsen Hu, *Theory of Retracts*, Detroit 1965, stron 234 oraz
K. Borsuk, *Theory of Retracts*, Monografie Matematyczne 44, Warszawa 1967, stron 251.
Spośród nowszych prac badawczych z zakresu teorii retraktów na specjalną uwagę zasługuje praca
J.E. West, *Mapping Hilbert cube manifolds to ANR's: A solution of a conjecture of Borsuk*, *Annals of Math.* 106 (1977), pp. 1—18,
w której udowodnione jest, że każda przestrzeń ANR ma typ homotopii pewnego wielościanu.
W ostatnich latach ukazało się wiele prac poświęconych przestrzeniom ANR mającym dość nieoczekiwane własności (prace Armentrouta, Binga, Singha i innych).

Fund. Math. jest skrótem *Fundamenta Mathematicae*. Jest to tytuł czasopisma matematycznego założonego w Polsce w 1920 roku i poświęconego teorii mnogości i topologii. Jest to pierwsze w świecie czasopismo matematyczne poświęcone tylko wąskiej grupie zagadnień. Do chwili obecnej ukazało się 101 tomów tego pisma.

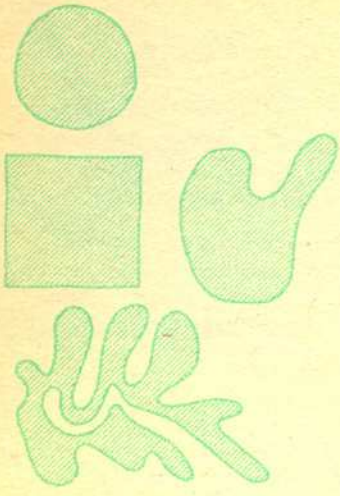
$\sum\limits_{k=1}^{\infty}$ jest symbolem sumy szeregu nieskończonego. Jeżeli ciąg $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$, $S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4, \ldots$ sum pewnego ciągu jest zbieżny, to granicę $\lim\limits_{k\to\infty} S_k = \lim\limits_{k\to\infty} (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k)$ nazywamy sumą szeregu $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ i oznaczamy przez $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

O pojęciu spójności pisaliśmy szerzej w nr 1/1979.

gf oznacza tu złożenie funkcji *f* i *g*, tj.

$$(gf)(x) = g(f(x)).$$

Jeżeli f przekształca X na Y oraz istnieje przekształcenie $g : Y \to X$ takie, że $(gf)(x) = x$ dla każdego $x \in X$ (przekształcenie g nazywamy wówczas *odwróceniem* przekształcenia f i piszemy $g = f^{-1}$), to mówimy, że f jest *homeomorfizmem X na Y*. Jeżeli istnieje homeomorfizm przekształcający X na Y, to mówimy, że przestrzenie X i Y są *homeomorficzne* (rys. 1 i 2).



Rys. 1. Przestrzenie homeomorficzne

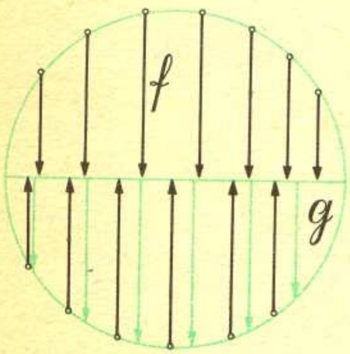
Rys. 2. Te przestrzenie nie są homeomorficzne

Korzystać będziemy z następującego **twierdzenia** (Urysohna):

Każde kompaktum jest homeomorficzne z pewnym podzbiorem domkniętym kostki Q^{∞}.

Rezygnując z dokładnej definicji wymiaru, przyjmijmy jedynie, że kompaktum A ma wymiar skończony wtedy i tylko wtedy, gdy jest homeomorficzne z podzbiorem pewnej kostki Q^n.

Topologia jest nauką o tych własnościach przestrzeni, które są niezmiennikami homeomorfizmów, a więc które zachowują się, gdy daną przestrzeń zastąpimy przez dowolną przestrzeń z nią homeomorficzną. Łatwo okazać, że np. spójność lub zwartość są niezmiennikami homeomorfizmów.



Rys. 3. r-przekształcenie

3. Retrakcje. Ogólniejszą od klasy homeomorfizmów jest klasa tzw. r-przekształceń. Mówimy, że przekształcenie $f : X \to Y$ jest *r-przekształceniem X na Y*, jeżeli istnieje przekształcenie $g : Y \to X$ prawostronnie odwrotne względem f, tj. takie, że (rys. 3)

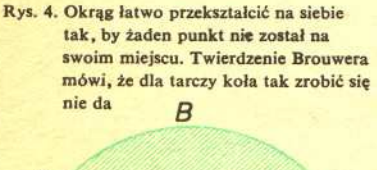
$$fg(y) = y \quad \text{dla każdego} \quad y \in Y.$$

Jeżeli takie r-przekształcenie $f : X \to Y$ istnieje, to mówimy, że Y jest r-obrazem przestrzeni X. Nie żądamy przy tym, by g przekształcało Y na X; łatwo jednak okazać, że zbiór $g(Y)$ jest homeomorficzny z Y. Zauważmy, że jeżeli $f_1 : X \to Y$ i $f_2 : Y \to Z$ są r-przekształceniami, to ich złożenie $f_2 f_1 : X \to Z$ jest też r-przekształceniem. A zatem każdy r-obraz r-obrazu przestrzeni X jest też r-obrazem przestrzeni X.

Przykładem r-przekształcenia jest rzutowanie f (prostopadłe) okręgu X na jego średnicę Y. Istotnie, jeżeli Z jest jednym z półokręgów, na które średnica Y rozcina X, to przyporządkowując każdemu punktowi $y \in Y$ taki punkt $z \in Z$, że $f(z) = y$, otrzymamy przekształcenie $g : Z \to Y$ prawostronnie odwrotne względem f (rys. 3).

Rys. 4. Okrąg łatwo przekształcić na siebie tak, by żaden punkt nie został na swoim miejscu. Twierdzenie Brouwera mówi, że dla tarczy koła tak zrobić się nie da

Jeżeli przestrzeń Y jest podzbiorem przestrzeni X, to przekształcenie $f : X \to Y$ (jeżeli istnieje) nazywamy *retrakcją*, jeżeli $f(y) = y$ dla każdego $y \in Y$. Mówimy wówczas, że Y jest retraktem przestrzeni X. Jasne jest, że kładąc $g(y) = y$ dla każdego $y \in Y$ otrzymamy przekształcenie $g : Y \to X$ prawostronnie odwrotne względem f. A więc każda retrakcja jest r-przekształceniem.



Rys. 5. Brzeg koła nie jest jego retraktem

Zauważmy, że brzeg B tarczy koła K nie jest jej retraktem (rys. 4, 5). Istotnie, gdyby istniała retrakcja $r : K \to B$, to oznaczając dla każdego $y \in B$ przez $s(y)$ różny od y koniec średnicy przechodzącej przez y, otrzymamy takie przekształcenie $s : B \to K$, że przekształcenie $\varphi = sr : K \to K$ spełnia warunek $\varphi(x) \neq x$ dla każdego $x \in K$. Wiadomo jednak (tw. Brouwera), że tarcza koła K należy do klasy przestrzeni X mających tzw. własność punktu stałego, tzn. dla każdego przekształcenia $\varphi : X \to X$ istnieje co najmniej jeden taki punkt $x_0 \in X$, że $\varphi(x_0) = x_0$.

4. r-niezmienniki. Własność przestrzeni, która zachowuje się, gdy przestrzeń zastąpimy przez dowolny jej r-obraz, nazywamy *r-niezmiennikiem*. Ponieważ każdy homeomorfizm jest r-przekształceniem, więc r-niezmienniki są szczególnym przypadkiem niezmienników homeomorfizmów. Wynika stąd, że ich teoria, czyli *teoria retraktów*, jest działem topologii.

Łatwo zauważyć, że spójność i zwartość są r-niezmiennikami (a nawet są one niezmiennikami wszelkich przekształceń). Innym przykładem r-niezmiennika jest posiadanie punktu stałego. Istotnie, jeżeli $f: X \to Y$ jest r-przekształceniem, a $g: Y \to X$ jego prawostronnym odwróceniem i jeżeli X ma własność punktu stałego, to dla każdego przekształcenia $\psi: Y \to Y$ wzór $\varphi = g\psi f: X \to X$ określa przekształcenie dla którego istnieje punkt $x_0 \in X$ taki, że $\varphi(x_0) = x_0$. Wówczas $f(x_0) = fg\psi f(x_0) = \psi f(x_0)$, a więc punkt $y_0 = f(x_0) \in Y$ spełnia warunek $\psi(y_0) = y_0$.

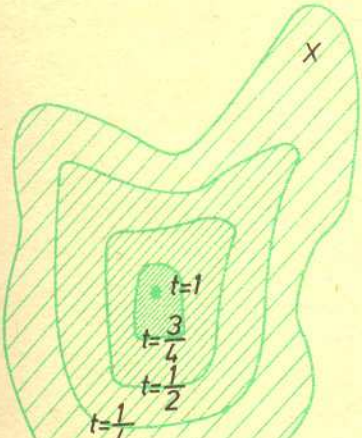
Natomiast zaprzeczenie własności punktu stałego nie jest już r-niezmiennikiem, bowiem okrąg nie ma własności punktu stałego, ale przestrzeń złożona z jednego tylko punktu (będąca oczywiście r-obrazem okręgu) ma własność punktu stałego.

Okazuje się, że do r-niezmienników należy wiele własności bardzo istotnych dla budowy przestrzeni, jak np. ściągalność i lokalna ściągalność.

Aby wyjaśnić sens tych pojęć, oznaczmy dla każdej pary przestrzeni X, X' przez $X \times X'$ ich iloczyn kartezjański, tj. przestrzeń, której punktami są pary (x, x'), gdzie $x \in X$, $x' \in X'$ i gdzie odległość określa wzór

$$\varrho\big((x, x'), (\hat{x}, \hat{x}')\big) = \sqrt{\varrho(x, \hat{x})^2 + \varrho(x', \hat{x}')^2}.$$

Powiemy, że dwa przekształcenia $f_0, f_1: X \to Y$ są *homotopijne* (oznaczenie: $f_0 \simeq f_1$), jeżeli istnieje takie przekształcenie $\varphi: X \times \langle 0,1 \rangle \to Y$, gdzie $\langle 0,1 \rangle$ oznacza przedział liczbowy $0 \leqslant t \leqslant 1$, że $f_0(x) = \varphi(x, 0)$ i $f_1(x) = \varphi(x, 1)$ dla każdego $x \in X$.

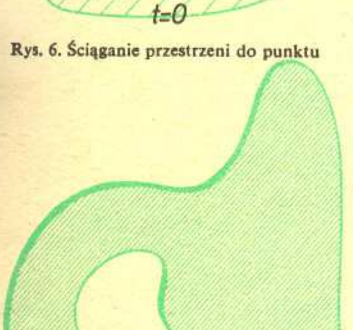


Rys. 6. Ściąganie przestrzeni do punktu

Powiemy, że podzbiór A przestrzeni X jest *ściągalny w X*, jeżeli przekształcenie $i: A \to X$ dane przez wzór $i(x) = x$ dla każdego $x \in A$ jest homotopijne ze stałą, tj. z przekształceniem $e: A \to X$ przekształcającym A w jeden punkt przestrzeni X.

Przez *przestrzeń ściągalną* rozumieć będziemy przestrzeń ściągalną w sobie (rys. 6, 7).

Powiemy, że przestrzeń X jest *lokalnie ściągalna*, jeżeli dla każdego jej punktu x_0 i każdego zbioru otwartego $G \subset X$ zawierającego punkt x_0 istnieje zbiór otwarty $G_0 \subset G$ zawierający punkt x_0 i ściągalny w G.


Rys. 7. Tej przestrzeni nie da się ściągnąć do punktu

Okrąg koła stanowi prosty przykład continuum, które nie jest ściągalne, lecz jest lokalnie ściągalne. Aby otrzymać przykład continuum, które jest ściągalne, lecz nie jest lokalnie ściągalne, weźmy na płaszczyźnie E^2 punkty $a_0 = (0,0)$ i $a_k = \left(\frac{1}{k}, 0\right)$ dla $k = 1, 2, \ldots$ oraz $b = (0,1)$. Niech L_k oznacza odcinek o końcach a_k i b. Wówczas suma wszystkich odcinków L_k, a więc zbiór $X = \bigcup_{k=0}^{\infty} L_k$ jest continuum ściągalnym, ale nie lokalnie ściągalnym, łatwo bowiem zauważyć, że w zbiorze $G = X \setminus \{b\}$, który jest w X otwarty i zawiera punkt a_0, nie istnieje podzbiór otwarty G_0 zawierający punkt a_0 i ściągalny w G.

Łatwo okazać, że zarówno ściągalność jak i lokalna ściągalność przestrzeni są r-niezmiennikami.

5. Przestrzenie AR i ANR. Wyodrębnienie w klasie wszystkich niezmienników homeomorfizmów specjalnie ważnej klasy r-niezmienników stanowi istotę teorii retraktów. Teoria ta pozwala też na wyodrębnienie w naturalny sposób w klasie wszystkich przestrzeni klasy przestrzeni o specjalnie prostych topologicznych własnościach, a mianowicie klasy tzw. retraktów absolutnych (czyli przestrzeni AR) oraz ogólniejszej od niej klasy tzw. retraktów absolutnych otoczeniowych (czyli przestrzeni ANR). Poprzestanę tu na podaniu ich definicji i podstawowych ich własności, ograniczając się do zakresu kompaktów.

Kompaktum A nazywa się *retraktem absolutnym* (co zapisujemy: $A \in$ AR), jeżeli dla każdego homeomorfizmu h przekształcającego A na podzbiór $h(A)$ dowolnej przestrzeni X, zbiór $h(A)$ jest retraktem przestrzeni X.

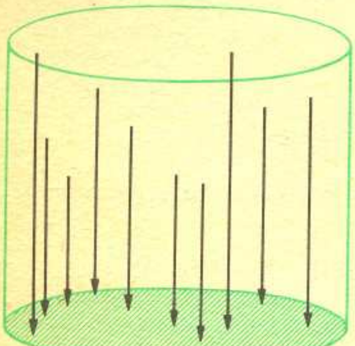
Kompaktum A nazywa się *retraktem absolutnym otoczeniowym* (co zapisujemy: $A \in$ ANR), jeżeli dla każdego homeomorfizmu h przekształcającego A na podzbiór $h(A)$ dowolnej przestrzeni X, zbiór $h(A)$ jest retraktem pewnego zbioru G otwartego w X.

Przestrzenie ANR stanowią dość obszerną klasę przestrzeni, zawierającą w szczególności wszystkie wielościany (pojęcie wielościanu, w zakresie podzbiorów przestrzeni euklidesowej 3-wymiarowej E^3, jest dobrze znane z geometrii elementarnej, w sposób naturalny definiuje się też wielościany wymiarów wyższych). Również znaczna część przestrzeni rozpatrywanych w innych działach matematyki należy do klasy przestrzeni ANR.
W szczególności przestrzenią ANR jest każda rozmaitość, tj. każde takie continuum X, że dla każdego punktu $x_0 \in X$ istnieje w X zbiór otwarty zawierający x_0 i homeomorficzny z przestrzenią E^n. Łatwo też okazać, że iloczyn kartezjański dwóch przestrzeni ANR jest też przestrzenią ANR i jeżeli zbiory X_1, X_2 i ich część wspólna $X_1 \cap X_2$ są przestrzeniami ANR, to ich suma $X_1 \cup X_2$ jest też przestrzenią ANR.
Udowodnijmy teraz następujące

Twierdzenie. *Aby $A \in$ AR potrzeba i wystarcza, by A było r-obrazem kostki Hilberta Q^∞.*

Zacznijmy od dowodu pewnego lematu, w dowodzie którego skorzystamy z następującego **twierdzenia Tietzego:**

Jeżeli kompaktum B jest podzbiorem przestrzeni X, to dla każdego przekształcenia α zbioru B w przedział liczbowy I: $0 \leqslant t \leqslant c$, gdzie $c > 0$, istnieje takie przekształcenie $\overline{\alpha}: X \to I$, że $\overline{\alpha}(x) = \alpha(x)$ dla każdego punktu $x \in B$.



Rys. 8. Podstawa walca jest jego retraktem

Lemat. *Jeżeli kompaktum B jest podzbiorem przestrzeni X, to dla każdego przekształcenia $\alpha: B \to Q^\infty$ istnieje takie przekształcenie $\overline{\alpha}: X \to Q^\infty$, że $\overline{\alpha}(x) = \alpha(x)$ dla każdego punktu $x \in B$.*

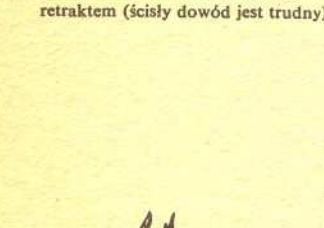
Istotnie, wartościami przekształcenia α są punkty $(\alpha_1(x), \alpha_2(x), \dots) \in Q^\infty$.

Wówczas α_k jest przekształceniem zbioru B w przedział $I_k: 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{k}$, a więc istnieje takie przekształcenie $\overline{\alpha}_k: X \to I_k$, że $\overline{\alpha}_k(x) = \alpha_k(x)$ dla każdego $x \in B$.
Kładąc

$$\overline{\alpha}(x) = (\overline{\alpha}_1(x), \overline{\alpha}_2(x), \dots) \text{ dla każdego } x \in X,$$

otrzymamy (jak łatwo zauważyć) przekształcenie $\overline{\alpha}: X \to Q^\infty$ spełniające tezę lematu.

Dowód twierdzenia. Jeżeli $A \in$ AR, to na mocy twierdzenia Urysohna istnieje homeomorfizm h przekształcający A na pewne kompaktum $B \subset Q^\infty$. Wobec $A \in$ AR, istnieje retrakcja $r: Q^\infty \to B$. Kładąc $f(x) = h^{-1}r(x)$ dla każdego $x \in Q^\infty$, otrzymamy przekształcenie $f: Q^\infty \to A$, dla którego prawostronnym odwróceniem jest $h: A \to Q^\infty$. A więc f jest r-przekształceniem i A jest r-obrazem kostki Q^∞.
Z drugiej strony, jeżeli istnieje przekształcenie $f: Q^\infty \to A$ mające prawostronne odwrócenie $g: A \to Q^\infty$ i jeżeli h jest homeomorfizmem przekształcającym A na podzbiór B przestrzeni X, to na mocy lematu, dla przekształcenia $\alpha = gh^{-1}: B \to Q^\infty$ istnieje przekształcenie $\overline{\varphi}: X \to Q^\infty$ takie, że $\overline{\varphi}(x) = \varphi(x)$ dla każdego $x \in B$. Kładąc



Rys. 9. Brzeg wstęgi Möbiusa nie jest jej retraktem (ścisły dowód jest trudny)

$$r(x) = hf\overline{\varphi}(x) \text{ dla każdego } x \in X,$$

otrzymamy takie przekształcenie $r: X \to B$, że dla każdego $x \in B$ jest

$$r(x) = hf\varphi(x) = hfgh^{-1}(x) = hh^{-1}(x) = x.$$

A więc r jest retrakcją i dowód jest zakończony.

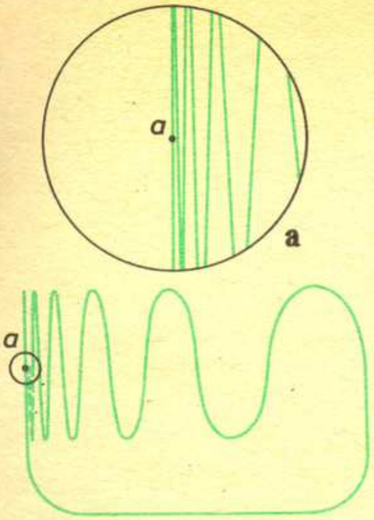
W podobny sposób można udowodnić

Twierdzenie. *Aby $A \in$ ANR potrzeba i wystarcza, by A było r-obrazem pewnego podzbioru otwartego kostki Hilberta Q^∞.*

Biorąc pod uwagę, że złożenie dwóch r-przekształceń jest r-przekształceniem, otrzymujemy z tych twierdzeń następujący

Wniosek. *Pojęcia przestrzeni* AR *i* ANR *są r-niezmiennikami.*

Zauważmy, że kostka Hilberta Q^∞ jest ściągalna w sobie.
Istotnie, kładąc
$\varphi((x_1, x_2, \dots), t) = (tx_1, tx_2, \dots)$ dla każdego punktu $(x_1, x_2, \dots) \in Q^\infty$ i dla $0 \leqslant t \leqslant 1$, otrzymamy przekształcenie $\varphi: Q^\infty \times \langle 0,1 \rangle \to Q^\infty$ takie, że



Rys. 10. To nie jest retrakt absolutny, bo żadne małe otoczenie punktu a (rys. 10a) nie jest spójne, a więc i nie jest ściągalne

$\varphi(x, 0) = (0,0, \dots)$ i $\varphi(x, 1) = x$ dla każdego $x \in Q^{\infty}$. Podobnie łatwo okazać, że każdy podzbiór otwarty kostki Q^{∞} jest lokalnie ściągalny. Ponieważ ściągalność i lokalna ściągalność są r-niezmiennikami, wnosimy stąd, że każda przestrzeń AR jest ściągalna w sobie, a każda przestrzeń ANR jest lokalnie ściągalna.

Można okazać, że w zakresie kompaktów wymiaru skończonego, lokalna ściągalność charakteryzuje przestrzenie ANR (rys. 10). Natomiast istnieją kompakta wymiaru nieskończonego, które są lokalnie ściągalne, lecz nie są przestrzeniami ANR. Pozostaje nierozstrzygnięte, jak należy wzmocnić warunek lokalnej ściągalności, by uzyskać scharakteryzowanie wszystkich przestrzeni ANR.

Teoria przestrzeni ANR gra podstawową rolę w badaniach topologicznych własności tzw. rozmaitości wymiaru nieskończonego. Rozmaitości te są ostatnio przedmiotem intensywnych badań, zwłaszcza w USA (prace R. D. Andersona, T. A. Chapmana, J. E. Westa i innych) oraz w Polsce (prace C. Bessagi, A. Pełczyńskiego, H. Toruńczyka i innych). Warto też wspomnieć, że nowy dział topologii, zwany teorią kształtu, w istotny sposób opiera się na teorii przestrzeni ANR.

6. Uwagi końcowe. Przestrzenie ANR wyróżniają się wśród innych przestrzeni dużą regularnością swych własności topologicznych, przypominających w znacznym stopniu własności wielościanów. W tzw. topologii algebraicznej rozpatruje się rozmaite niezmienniki homeomorfizmów o charakterze algebraicznym (w szczególności przyporządkowuje się przestrzeniom rozmaite grupy: homologii, kohomologii, homotopii, kohomotopii). Okazuje się, że grupy te zachowują się w sposób specjalnie prosty, gdy od przestrzeni przechodzimy do jej r-obrazu, a w przypadku przestrzeni ANR, grupy te mają budowę podobną jak w przypadku wielościanów. Również twierdzenie dotyczące istnienia punktów stałych dla przekształceń (w szczególności tzw. twierdzenie Lefschetza) pozostaje prawdziwe w zakresie przestrzeni ANR, lecz przestaje być prawdziwe w zakresie dowolnych kompaktów. Mimo to wśród przestrzeni ANR występują zjawiska o dość zaskakującym charakterze, nie pojawiające się wśród wielościanów. Tak np. istnieją wielopunktowe continua X będące przestrzeniami ANR, które nie dają się przedstawić w postaci sumy skończenie wielu zbiorów ANR o średnicach mniejszych od średnicy zbioru X. Inną osobliwością jest istnienie wśród zbiorów ANR położonych w przestrzeni E^3 continuów, które są wspólnym brzegiem trzech obszarów (tj. zbiorów otwartych w E^3 i spójnych).

Mówimy, że przestrzenie X i Y są *r-równe* (oznaczenie: $X \underset{r}{=} Y$) jeżeli każda z nich jest r-obrazem drugiej. Jeżeli Y jest r-obrazem przestrzeni X, lecz X nie jest r-obrazem przestrzeni Y, to mówimy, że X jest *r-wieksze* od Y (oznaczenie: $X \underset{r}{>} Y$). Np. okrąg jest r-większy od odcinka, a odcinek jest r-większy od przestrzeni złożonej tylko z jednego punktu. Istnieje wiele prac poświęconych badaniu relacji $\underset{r}{=}$, ale tematyka ta jest ciągle daleka od wyczerpania.

Ważniejszą od klasyfikacji przestrzeni ANR opartej na relacji $\underset{r}{=}$ jest klasyfikacja homotopijna. Mówimy mianowicie, że dwa kompakta X, Y mają *ten sam typ homotopii*, jeżeli istnieją przekształcenia

$$f: X \to Y \quad \text{i} \quad g: Y \to X$$

takie, że przekształcenie $gf: X \to X$ jest homotopijne z przekształceniem $i_X: X \to X$ danym przez wzór $i_X(x) = x$ dla każdego $x \in X$, a przekształcenie $fg: Y \to Y$ jest homotopijne z przekształceniem $i_Y: Y \to Y$ danym przez wzór $i_Y(y) = y$ dla każdego $y \in Y$.

Bardzo istotne dla teorii przestrzeni ANR zagadnienie, czy każda taka przestrzeń ma typ homotopii pewnego wielościanu, postawione już przed kilkudziesięciu laty, zostało ostatnio rozwiązane pozytywnie przez amerykańskiego matematyka J. E. Westa. Wynik ten ustala daleko idący związek między czysto topologicznym pojęciem przestrzeni ANR, a elementarno-geometrycznym pojęciem wielościanu.

Związki między homotopijną klasyfikacją przestrzeni ANR, a ich klasyfikacją według relacji $\underset{r}{=}$ nie są całkowicie wyjaśnione. Nie wiadomo np., czy każde dwie r-równe przestrzenie ANR mają jednakowy typ homotopii. Podobne zagadnienie w zakresie wszystkich kompaktów ma odpowiedź negatywną.