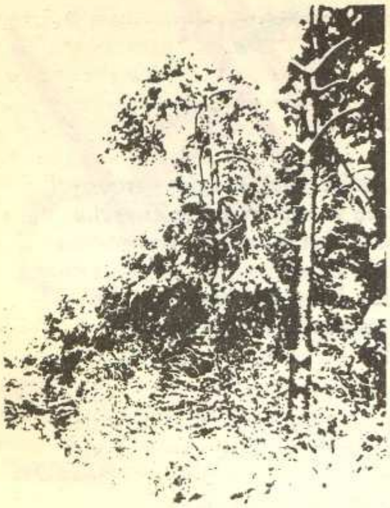


Na czym polega wykonanie konstrukcji geometrycznej? Klasycznie sformułowana odpowiedź na takie pytanie jest jasna i konkretna. Dane są na płaszczyźnie punkty $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Wykreślamy proste przechodzące przez dwa dane punkty oraz okręgi o środkach w danych punktach oraz promieniach równych odległości dwóch danych punktów. Punkty przecięcia otrzymanych w ten sposób linii wraz z punktami danymi stanowią zbiór punktów wyznaczających nowe proste i nowe okręgi. Powiększamy nasz zbiór dołączając punkty przecięcia tych prostych i okręgów itd. Uznajemy, że punkt Q można skonstruować z danych punktów $P_1, P_2, \ldots, P_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy punkt Q jest jednym z punktów uzyskanych w wyniku iteracji wyżej opisanego postępowania.

Czasem możemy spotkać zadanie konstrukcyjne, którego sformułowanie wprawdzie może sugerować, że zadanie nie mieści się w opisanym tu schemacie, ale rozwiązanie zadania polega na wykonywaniu jedynie opisanych wyżej klasycznych czynności konstrukcyjnych. Weźmy pod uwagę

Zadanie. Narysowany jest okrąg. Skonstruować jego środek. Oczywiście środek wyznaczymy jako punkt przecięcia symetralnych dowolnych dwóch cięciw nierównoległych naszego okręgu. (Czytelnik wybaczy brak w powyższym zdaniu wyodrębnionej analizy zadania, opisu konstrukcji, dowodu i dyskusji). Istotnie więc konstrukcja polega na wykorzystywaniu cyrkla i linijki zgodnie z klasycznymi regułami.

Okazuje się, że gdy na płaszczyźnie narysowana jest pewna krzywa, np. parabola, to można za pomocą cyrkla i linijki narysować pewne proste i okręgi, które przecinają się z narysowaną parabolą w punktach niekonstruowalnych w sposób klasyczny. Dokładne wyjaśnienie tej sprawy znajdzie Czytelnik np. w książeczce M. Bryńskiego i L. Włodarskiego z serii Biblioteczki Delty.

I tak np. dysponując układem współrzędnych, a w nim parabolą $y = x^2$ można wykonać konstrukcję podwojenia sześcianu. Ten klasyczny problem konstrukcyjny polega na zbudowaniu sześcianu o objętości dwukrotnie większej od objętości sześcianu danego. Zadanie to jest niewykonalne środkami klasycznymi; chodzi o to, że przyjmując długość krawędzi danego sześcianu za 1, powinniśmy skonstruować krawędź sześcianu o objętości 2, a więc odcinek o długości $\sqrt[3]{2}$. Liczba ta jest pierwiastkiem wielomianu x^3-2, a więc też wielomianu x^4-2x. Przyjmując $y = x^2$ możemy przekształcić

$$x^4-2x = x^4-x^2+x^2-2x = y^2-y+x^2-2x = y^2-y+\frac{1}{4}+x^2-2x+1-\frac{5}{4} =$$

$$= \left(y-\frac{1}{2}\right)^2+(x-1)^2-\frac{5}{4} = (x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}.$$

Okrąg o równaniu $(x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4} = 0$ przecina parabolę $y = x^2$ w punktach, z których jeden ma współrzędne $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$.

Prowadząc więc taki okrąg wyznaczymy odcinek o długości $\sqrt[3]{2}$.

Dla wykonania tej konstrukcji nie potrzebowaliśmy całej paraboli, a jedynie pewnego jej kawałka. Czy można więc określić klasę konstrukcji wykonalnych za pomocą cyrkla, linijki i kawałka paraboli? Od razu widać, że ewentualne określenie takiej klasy mogłoby zależeć od wielkości danego kawałka paraboli. Nie jest całkiem jasne, jak duży kawałek paraboli jest potrzebny do wykonania zadania podwojenia sześcianu. Mógłby on być dowolnie mały, gdyby zawierał punkt $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$. A czy można wykonać konstrukcję dysponując dowolnie dużym kawałkiem paraboli, który jednak nie zawiera tego punktu? Jest to inne pytanie i nie będziemy starali się tu na nie odpowiedzieć. Zadanie konstrukcyjne, przy rozwiązywaniu którego dysponujemy cyrklem, linijką i danym kawałkiem stożkowej, nie musi być (ale może być) równoważne temu samemu zadaniu w przypadku, gdy dysponujemy całą tą stożkową.

Przedstawiona konstrukcja podwojenia sześcianu za pomocą cyrkla, linijki i paraboli ma jeszcze jedną skazę. Używaliśmy mianowicie *równania* paraboli, a zatem czy ta konstrukcja była „geometryczna"? Niżej drukujemy artykuł zawierający odpowiedź na pytanie, czy mając kawałek paraboli można skonstruować (i czy „geometrycznie"?) jej wierzchołek.

M. B.

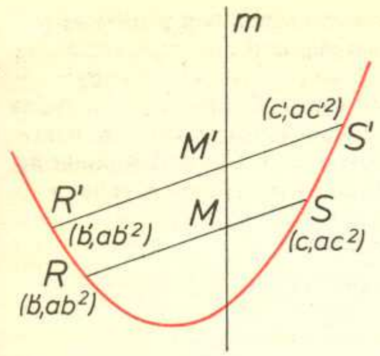
Czy to konstrukcja euklidesowa?

W angielskim kręgu językowym konstrukcje platońskie nazywane są euklidesowymi

Prof. dr Leon HENKIN i prof. dr William A. LEONARD, Stany Zjednoczone

Powiedział ktoś, że nie ma nieinteresujących problemów w matematyce... są tylko nieinteresujące rozwiązania. Przypuśćmy jednak, że mamy dokonać wyboru: czy lepiej znaleźć rozwiązanie interesujące, czy też rozwiązanie poprawne? A może dla ciekawych problemów warto poszukać rozwiązań spełniających oba te wymagania?

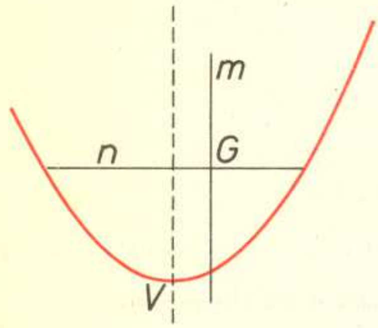
Matematycy z pewnością wymagają, by każde twierdzenie i każda metoda matematyczna były nie tylko poprawne, ale także interesujące i jeśli nie piszemy o tym dokładniej, to tylko dlatego, że nie ma obiektywnych kryteriów pozwalających ocenić, na ile poszczególne twierdzenia lub dowody są interesujące.



Dla matematyków mają wartość również inne nieobiektywne aspekty wyników twórczości matematycznej — swojego rodzaju względy estetyczne, wśród których prostota wyniku jest jednym z ważniejszych. Pewnym kontrowersyjnym kryterium stosowanym czasem do oceny dowodu jest „czystość metod", na przykład twierdzenie uznane za geometryczne, powinno być zdaniem pewnych matematyków udowodnione w miarę możliwości „metodami czysto geometrycznymi"; nawet jeśli nikt nie potrafi dokładnie wyjaśnić, co to znaczy. Szereg takich nieprecyzyjnych pytań pojawia się, gdy chcemy wykonywać konstrukcje euklidesowe jedynie za pomocą cyrkla i linijki, na stożkowych różnych od okręgów i prostych.
Zacznijmy od prostego problemu, którego intuicyjne rozwiązanie prowadzi niespodziewanie do pewnych pytań z podstaw matematyki.

Problem. Nie wiemy dokładnie, kiedy powstał nasz problem. Wydaje się, że pojawił się podczas spotkań Kalifornijskiej Rady Matematycznej. Brzmi on jak następuje. Dany jest kawałek paraboli (rysunek). Czy można znaleźć wierzchołek paraboli używając jedynie cyrkla i linijki?

Rozwiązanie pozorne. Wykreślmy cięciwę RS paraboli i skonstruujmy cięciwę $R'S'$ równoległą do RS. Zbudujmy następnie środki M i M' odpowiednio cięciw RS i $R'S'$ i poprowadźmy prostą m łączącą te środki. Wykażemy, że prosta m jest równoległa do osi paraboli. Przypuśćmy, że na płaszczyźnie jest prostokątny układ współrzędnych, którego początek pokrywa się z wierzchołkiem paraboli, a półoś dodatnia drugiej osi współrzędnych pokrywa się z osią paraboli. W tym układzie współrzędnych nasza parabola ma równanie $y = ax^2$, gdzie a jest pewną liczbą dodatnią. Niech b, b', c i c' będą odpowiednio odciętymi punktów R, R', S i S'; wobec tego rzędnymi tych punktów są odpowiednio ab^2, ab'^2, ac^2 i ac'^2, odciętymi zaś punktów M i M' są odpowiednio $\frac{c+b}{2}$ i $\frac{c'+b'}{2}$. Ponieważ proste RS i $R'S'$ są równoległe, więc ich współczynniki kierunkowe są równe. Wobec tego



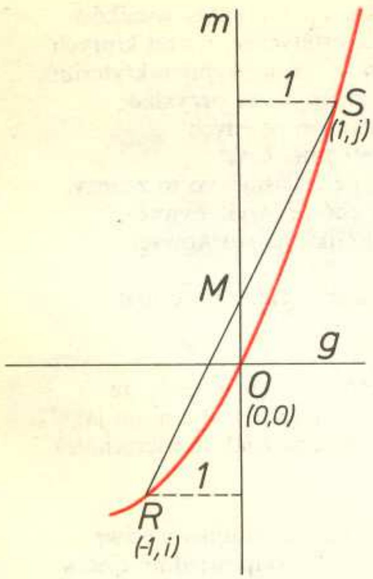
$$\frac{ac^2-ab^2}{c-b} = \frac{ac'^2-ab'^2}{c'-b'}$$

skąd otrzymujemy $c+b = c'+b'$. Wynika stąd, że punkty M i M' mają równe odcięte, więc prosta m łącząca te punkty jest równoległa do osi rzędnych, a więc do osi paraboli.

Powróćmy do zadanej konstrukcji. Przez odpowiedni punkt G leżący na prostej m poprowadźmy cięciwę n danego łuku paraboli, w ten sposób by odcinek n był prostopadły do m. Symetralna odcinka n pokrywa się oczywiście z osią paraboli, więc punkt V przecięcia tej symetralnej z łukiem paraboli jest poszukiwanym wierzchołkiem.

Czy powyższe jest rozwiązaniem geometrycznym naszego geometrycznego zadania? Chociaż stosowaliśmy nieco algebry w rozważaniach poprzedzających konstrukcję, to jednak sama konstrukcja polegała na wykonaniu klasycznych czynności geometrycznych: konstruowanie prostej równoległej do danej prostej, wyznaczanie środków danych odcinków, prowadzenie przez dany punkt prostej prostopadłej do danej prostej i konstruowanie symetralnej danego odcinka. Wobec tego bez wątpliwości otrzymaliśmy rozwiązanie geometryczne rozważanego zadania.
Czy rzeczywiście nie ma wątpliwości? Trzeba przyznać, że Czytelnik bardzo podejrzliwy może mieć pewne wątpliwości. Na przykład w sformułowaniu zadania podaliśmy, że dana część paraboli jest taka jak na rysunku. Co by jednak było, gdyby dana część paraboli nie zawierała wierzchołka? Wówczas prosta n nie przetnie części paraboli w dwóch punktach i naszego rozwiązania nie można przeprowadzić.

Spójrzmy znów na rysunek. Rzeczywiście *wydaje się*, że dana część paraboli zawiera wierzchołek! Wobec tego wątpliwość rozważana wyżej nie dotyczy naszego zadania z rysunkiem, wystąpi jedynie przy podobnych zadaniach odpowiadających innym rysunkom; te zadania pozostaną bez rozwiązania.
Czy jesteśmy zadowoleni? Rozważmy dalsze wątpliwości. Jeśli nawet wierzchołek należy do danej części paraboli, to przypomnijmy, że prowadziliśmy prostą n prostopadłą do m przez pewien punkt G. Ale jak wybrać G?



Zgodnie z podanym przez nas przepisem, G był dowolnym punktem prostej m o tej własności, że prostopadła poprowadzona przez niego przecina daną część paraboli w dwóch punktach. Czy wyznaczamy G „na oko"? Jeśli wybierzemy pewien punkt i stwierdzimy, że prostopadła do m poprowadzona przez niego przecina dany łuk paraboli tylko w jednym punkcie, to czy to niepowodzenie pomoże nam wybrać inny punkt G', który będzie „lepszy"? Czy jest możliwe, że żaden punkt na prostej m nie będzie dobry? Same wątpliwości! Spróbujmy lepiej znaleźć inne rozwiązanie.

Inne sformułowanie i inne rozwiązanie. Dany jest *dowolny* łuk paraboli. Należy skonstruować wierzchołek tej paraboli za pomocą cyrkla i linijki.
Wybieramy dowolne punkty R i S na łuku i podobnie jak poprzednio konstruujemy prostą m przechodzącą przez środek M odcinka RS, która jest równoległa do osi paraboli. Prosta m przecina dany łuk w pewnym punkcie, nazwijmy go O. Następnie prowadzimy przez O prostą g prostopadłą do m. Rozpatrzmy teraz układ współrzędnych, w którym g i m są odpowiednio osiami odciętych i rzędnych, a jako jednostkę odległości przyjmijmy odległość punktu S od prostej m. Jeśli S ma współrzędne $(1, j)$ przy pewnym j, to R ma współrzędne $(-1, i)$ przy pewnym i oraz oczywiście O ma współrzędne $(0, 0)$. Wystawiając z S oraz R prostopadłe do g otrzymamy odcinki długości $|j|$ oraz $|i|$.
Jeżeli (h, k) są współrzędnymi poszukiwanego wierzchołka, to nasza parabola ma równanie postaci $y-k = a(x-h)^2$, gdzie a jest pewną liczbą. Ponieważ R, O oraz S leżą na paraboli, więc współrzędne tych punktów spełniają to równanie. Otrzymujemy stąd

$$i-k = a(-1-h)^2$$

$$-k = ah^2$$

$$j-k = a(1-h)^2$$

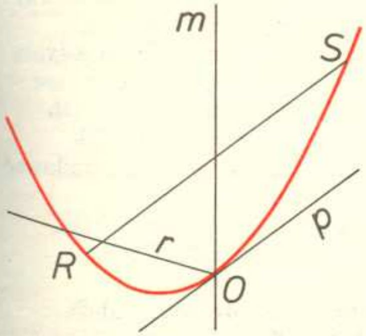
i wyliczamy $$h = \frac{i-j}{2(i+j)} \quad \text{i} \quad k = \frac{-(i-j)^2}{8(i+j)}.$$

Poprzednio zbudowaliśmy odcinki o długościach $|i|$, $|j|$. Powyższe wzory pozwolą na skonstruowanie nowych odcinków o długościach $|h|$ i $|k|$; zrobimy to za pomocą cyrkla i linijki powtarzając kilkakrotnie znane konstrukcje sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu danych odcinków.

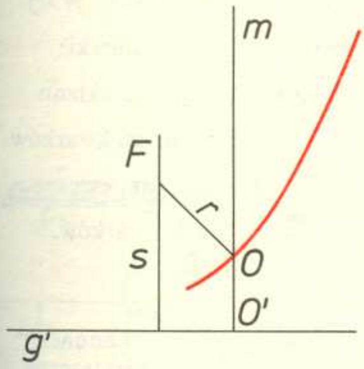
W końcu, dysponując odcinkami o długości $|h|$ i $|k|$, możemy znaleźć punkt o współrzędnej h na prostej q oraz punkt o współrzędnej k na prostej m. Następnie, prowadząc proste przez h oraz k odpowiednio równolegle do m oraz g i wyznaczając punkt przecięcia tych prostych otrzymujemy wreszcie wierzchołek rozważanej paraboli.

Porównanie rozwiązań. Choć drugie rozwiązanie nie jest obciążone pewnymi niedomówieniami, które podważały wartość pierwszego rozwiązania, to jednak uparty krytyk może w dalszym ciągu mieć pewne wątpliwości. Zaczynając od początku rozwiązanie przyjmijmy, że dla otrzymania prostej m narysowaliśmy najpierw cięciwę RS danego łuku paraboli. Czy zasady konstrukcji euklidesowych pozwalają wybrać punkty R i S na danym łuku w sposób dowolny? A jeśli nawet pozwolimy sobie na tę dowolność i wybierzemy trzeci punkt R' na łuku, to co będzie, jeśli prosta przeprowadzona przez R' równolegle do RS nie przetnie danego łuku? Powiedzmy, że w takim przypadku spróbujemy powtórnie, wybierając oczywiście punkt R' z części łuku zawartej między R i S. Czy jednak możemy robić to „na oko", czy też powinniśmy dysponować jakąś specjalną konstrukcją? Wydaje się, że nie będziemy mogli pozbyć się wszystkich wątpliwości, dopóki nie odpowiemy dokładnie, co to znaczy skonstruować punkt za pomocą cyrkla i linijki mając dany łuk paraboli. W klasycznych konstrukcjach euklidesowych mamy dany skończony zbiór punktów (lub figurę utworzoną przez proste i okręgi wyznaczone przez skończony zbiór punktów) i konstruujemy nowe punkty jako przecięcia prostych i okręgów, które są wyznaczone przez dane (lub poprzednio skonstruowane) punkty. Rozważane przez nas zadanie nie jest tego typu, przydałoby się więc specjalne określenie, na czym ma polegać interesująca nas konstrukcja. Ponieważ jednak próby takiego określenia wyprowadziłyby nas poza ramy tego artykułu, więc spójrzmy na nasze dwa rozwiązania z innego punktu widzenia. Nie wdając się w sprawę poprawności, pomyślmy, które jest bardziej interesujące?

Chyba nie drugie! Zamiast szukać wierzchołka naszej paraboli w duchu czysto geometrycznym, przechodzimy do geometrii analitycznej, rozwiązujemy układ równań, a następnie za pomocą cyrkla i linijki budujemy odcinek o długości $(i-j)/2(i+j)$.
Z geometrycznego punktu widzenia, to rozwiązanie wydaje się niejasne. Przeciwnie, każdy krok pierwszej konstrukcji ma jasny, intuicyjny sens. Jaka szkoda, że jest ono niepoprawne. Czy w ogóle jest możliwe rozwiązanie naszego zadania, które jest jednocześnie interesujące i poprawne?
Zobaczymy poniżej, że istotnie istnieje prawdziwie geometryczne rozwiązanie naszego problemu. Przedtem jednak zwróćmy uwagę na korzyści płynące z użycia metod analitycznych. Zauważymy mianowicie, że ta sama metoda może rozwiązywać kilka pokrewnych problemów. Będziemy mogli na przykład wraz z rozwiązaniem naszego zadania otrzymać konstrukcję ogniska lub kierownicy danej paraboli. Co można powiedzieć o innych stożkowych — elipsach lub hiperbolach? Czy mając dany dowolny łuk którejś z nich możemy otrzymać różne specjalne punkty lub proste związane z tą krzywą? Jeśli tak, to jak duży kawałek łuku stożkowej musi być dany, by można wykonać konstrukcję?
Gdy odpowiemy na to pytanie używając metod geometrii analitycznej, otrzymamy wzory, w których wystąpią nie tylko operacje wymierne, tj. dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie, ale również operacja wyciągania pierwiastka kwadratowego. Dobrze jednak wiadomo, że mając dany odcinek można za pomocą cyrkla i linijki zbudować odcinek, którego długość jest pierwiastkiem kwadratowym długości danego odcinka, o ile tylko mamy ponadto dany odcinek o długości 1. Z tego powodu możemy podać rozwiązanie za pomocą cyrkla i linijki wielu zadań konstrukcyjnych dotyczących hiperbol i elips. Czy będą to jednak rozwiązania interesujące, prawdziwe geometrycznie? Powróćmy do naszej paraboli i wskażmy wreszcie oczekiwane rozwiązanie.



Geometryczne wyznaczanie wierzchołka paraboli. Podobnie, jak w poprzednich dwóch rozwiązaniach, wykreślmy cięciwę RS danego łuku paraboli i skonstruujmy prostą m, przechodzącą przez środek cięciwy i równoległą do osi paraboli. Niech O będzie punktem przecięcia prostej m z łukiem paraboli; poprowadzimy prostą p przez O równolegle do RS. Popatrzmy na rysunek. Czy p wydaje się być styczną do paraboli w punkcie O? Tak. Możemy to uzasadnić przeprowadzając rachunki z naszego pierwszego rozwiązania i wyliczając, że punkt O ma odciętą $(c+b)/2$, zaś RS (a więc również p) ma współczynnik kierunkowy $a(c+b)$ w układzie współrzędnych, w którym parabola ma równanie $y = ax^2$. Ponieważ pochodna funkcji $y = ax^2$ jest $2ax$, więc jej wartość dla $x = \frac{c+b}{2}$ jest równa $2a\left(\frac{c+b}{2}\right) = a(c+b)$, a zatem jest równa współczynnikowi kierunkowemu prostej p. Prosta p jest więc istotnie styczna do paraboli.
W tym miejscu przypomnijmy zasadę działania teleskopu zwierciadlanego: promienie równoległe do osi zwierciadła parabolicznego po odbiciu przechodzą przez ognisko. Traktując m jako taki promień i za pomocą p wyznaczając kąt padania promienia m, skonstruujmy prostą r przechodzącą przez O w ten sposób, by kąt odbicia równał się kątowi padania. Wiemy, że prosta r przechodzi przez ognisko F naszej paraboli. Weźmy prócz odcinka RS bliski mu $R'S$ i powtórzmy poprzednią konstrukcję. Otrzymamy drugą prostą r' przechodzącą przez F. Punkt F jest teraz wyznaczony jako punkt przecięcia r i r'.



Prosta s przechodząca przez F i równoległa do m jest osią paraboli i jeśli przecina ona dany łuk, to punkt przecięcia jest szukanym wierzchołkiem paraboli. Jeśli natomiast oś nie przecina danego łuku, to znajdźmy na prostej m punkt O' leżący poniżej łuku paraboli i dla którego $OO' = OF$. Prosta g' przechodząca przez O' prostopadła do m jest kierownicą paraboli, gdyż parabola jest zbiorem punktów równo odległych od danego punktu (ogniska) i danej prostej (kierownicy). Wystawiając teraz w punkcie F prostą s prostopadłą do g' i znajdując środek odcinka wyznaczonego na s przez F i przez g' otrzymujemy poszukiwany wierzchołek.

Trudno zaprzeczyć, że to rozwiązanie (które zawdzięczamy recenzentowi pierwszej wersji tej pracy) jest czysto geometryczne. Odpowiedź na pytanie, czy rozwiązanie tego typu można znaleźć dla elipsy lub hiperboli, nie jest znana.
W problemie tym kryje się pytanie dotyczące podstaw matematyki: co to znaczy, że dany punkt można skonstruować za pomocą cyrkla i linijki mając dany łuk stożkowej?

Angielska wersja tej pracy ukazała się w listopadowym numerze *Mathematics Magazine* w 1978 roku.